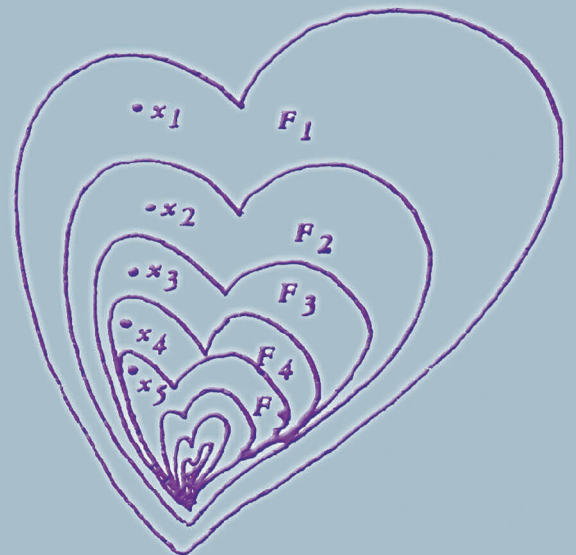


colección textos

textos  
textos  
textos  
textos  
textos  
textos  
textos

# ANÁLISIS MATEMÁTICO

Yu Takeuchi



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE BOGOTÁ  
FACULTAD DE CIENCIAS

Facultad de Ciencias  
Saber más y formar mejor

## Yu Takeuchi



Yu Takeuchi es Doctor Honoris Causa de la Universidad Nacional y Profesor Honorario de la misma.

Se vinculó al Departamento de Matemáticas en 1959, año en que llegó con un grupo de japoneses como profesor visitante a la Universidad.

Es físico de la Universidad de Tokio, pero en Colombia se dedicó al análisis matemático del que ha sido profesor e investigador desde entonces.

Son innumerables las generaciones de matemáticos y licenciados en matemáticas que han recibido sus cursos y conferencias por todo el país.

Ha publicado numerosos artículos en revistas especializadas y de divulgación matemática y varios libros sobre cálculo y análisis su especialidad.

Recientemente fue condecorado por la Cancillería colombiana con la orden San Carlos en el grado de oficial, en el marco de los 100 años de relaciones con el Japón.

Su principal tema de interés son las series y particularmente las series recurrentes. Entre sus últimas publicaciones se destacan los libros Series Recurrentes (2006) y Problemas de sucesiones Recurrentes (2007) de la colección Notas de Clase de la Facultad de Ciencias.

## ÚLTIMAS PUBLICACIONES colección textos

Orlando Vargas, editor  
Grupo de Restauración Ecológica  
ESTRATEGIAS PARA LA RESTAURACIÓN  
ECOLÓGICA DEL BOSQUE ALTOANDINO  
[ El caso de la Reserva Forestal  
Municipal de Cagua, Cundinamarca ]

Germán Arenas Sicard  
ELECTRICIDAD  
Y MAGNETISMO

Camilo Ernesto López C.  
FITOPATOLOGÍA MOLECULAR

Luis Guillermo Díaz M.  
ESTADÍSTICA MULTIVARIADA:  
INFERENCIA Y MÉTODOS

Yu Takeuchi  
PROBLEMAS DE SUCESIONES  
RECURRENTES

# ANÁLISIS MATEMÁTICO



# ANÁLISIS MATEMÁTICO

Yu Takeuchi

Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional de Colombia  
Sede Bogotá

ANÁLISIS MATEMÁTICO

© Yu Takeuchi

Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional de Colombia

© Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemáticas

Sexta edición, 2008  
Bogotá, Colombia

ISBN 978-958-719-044-1

Bogotá, Colombia

Diagramación en  $\text{\LaTeX}$  : Margoth Hernández Quitián  
Diseño de carátula: Andrea Kratzer

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Takeuchi, Yu, 1927 –  
Análisis Matemático / Yu Takeuchi. – Bogotá : Universidad  
Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, 2008  
vi, 450 p.

ISBN 978-958-719-044-1

1. Análisis matemático 2. Análisis numérico

CDD-21 515 / 2008

# Índice general

<b>1. Número de elementos de un conjunto</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Equivalencia (o equipotencia) de dos conjuntos . . . . .	2
1.3. Conjuntos Infinitos . . . . .	10
1.4. Conjuntos no contables (no numerables) . . . . .	18
<b>2. Conceptos básicos de topología en <math>\mathbb{R}^p</math></b>	<b>26</b>
2.1. Extremo superior . . . . .	26
2.2. Sucesiones numéricas . . . . .	39
2.3. Sucesiones de puntos del espacio $\mathbb{R}^p$ . . . . .	59
2.4. Puntos de acumulación. Teorema de Bolzano Weierstrass . . . . .	70
2.5. Conjunto cerrado. Conjunto abierto . . . . .	90
<b>3. Límites y continuidad</b>	<b>163</b>
3.1. Límites de una función . . . . .	163
3.2. Continuidad de función . . . . .	185
3.3. Algunos ejemplos importantes de funciones continuas . . . . .	201
3.4. Imagen directa e imagen inversa . . . . .	209
3.5. Continuidad uniforme . . . . .	224

<b>4. Función de valor real, de una variable real</b>	<b>269</b>
4.1. Límite por la derecha y límite por la izquierda . . . . .	269
4.2. Derivación . . . . .	297
4.3. Función de variación acotada . . . . .	356
<b>5. Sistemas numéricos</b>	<b>398</b>
5.1. Números naturales . . . . .	398
5.2. Números quebrados . . . . .	407
5.3. Número negativo y cero . . . . .	409
5.4. Expresión de un número en el sistema decimal . . . . .	410
5.5. Números decimales no-cíclicos . . . . .	418
5.6. Cortadura . . . . .	432

# Presentación

Por una “locura juvenil” o por la necesidad de escapar de las rígidas costumbres del Japón de la postguerra, en 1959, Yu Takeuchi atravesó medio mundo en un barco carguero para dejar en Colombia lo mejor de su creación como matemático, la esencia del pedagogo y la sabiduría y humildad del maestro. Se autodenomina “el abuelo de las matemáticas”, pues muchos de sus discípulos son considerados los padres de esa disciplina en las principales universidades del país. Recientemente fue condecorado por la Cancillería colombiana con la orden San Carlos en el grado de oficial, en el marco de los 100 años de relaciones con el Japón.

Le puso tanto empeño a su labor, que al año de enseñar en la Universidad Nacional ya hablaba español y a los dos años lo escribía. Este segundo logro sería definitivo en su propósito de llevar las matemáticas a lo largo y ancho del país, pues fundó la revista “Matemáticas: enseñanza universitaria” y escribió, de su propia mano o junto con estudiantes y colegas, 20 libros de texto y 30 de divulgación, algunos de los cuales imprimió en el garaje de su casa en Bogotá y otros en Japón. “La idea era ofrecer textos prácticos que fueran más entendibles que los que llegaban a Colombia de Alemania o Francia”.

Los libros sobre cálculo elemental, cálculo diferencial, sucesiones y series, mecánica analítica, análisis matemático, variables y análisis funcional lo hicieron famoso en las universidades de toda la geografía nacional e incluso en otros países de América Latina como México, donde matemáticos e ingenieros aprendieron a resolver todo tipo problemas de cálculo con las claves suministradas por él. Por esa razón dice que tiene estudiantes de salón que son como sus hijos, otros a los que éstos les enseñaron a través de los libros, que son como sus nietos, e incluso tiene tataranietos académicos.

“Además de la calidad, una de las ventajas que ofrecían los libros del profesor Takeuchi era un precio que estaba en muchos casos por debajo de los costos de producción; esto permitió que rápidamente se fueran convirtiendo en los textos de matemáticas más empleados en las universidades colombianas. Usualmen-

te estos libros estaban integrados por 60 párrafos, de tal forma que cada párrafo correspondía a una lección de una hora de clase, adaptándose así a la distribución semestral de las materias. Sobre los artículos escritos por él, se cree que hay alrededor de unos 86, entre ellos 46 de tipo investigativo y 40 de tipo divulgativo”

Sus alumnos, tanto los más jóvenes como los más experimentados, afirman querer ser algún día como ese maestro que les enseñó a resolver problemas numéricos en el papel y que con su ejemplo les transmitió la paciencia necesaria para resolver las grandes dificultades de la vida.

Mabel Paola López

Tomado de Universia Colombia, junio 27 de 2008

<http://www.universia.net.co/galeria-de-cientificos/matematicas-y-ciencias-naturales/yu-takeuchi.html>

# Prólogo

El análisis matemático es el primer curso teórico para los estudiantes que quieren adentrarse en la ciencia matemática. Siempre se presenta mucha dificultad para dominar esta materia puesto que los alumnos tienen que combinar adecuadamente los conceptos intuitivos del *cálculo elemental* con el *rigor lógico*, manteniendo una buena visión global del camino. Los libros actuales de análisis, que suelen tener una gran acumulación de definiciones, postulados, proposiciones y teoremas con sus demostraciones cortas y artificiales, con el fin de dar una mejor presentación y elegancia de la obra, sacrificando la visualización de la materia, pueden ser útiles para las personas que quieran repasar el análisis ya estudiado anteriormente, pero no son adecuados para los estudiantes que quieren iniciar estudios formales en matemática. Aún más, suelen acosar a los estudiantes principiantes con la memorización de términos, convirtiendo el estudio en recitación del texto. Lo que necesitan primero los estudiantes, no son conocimientos matemáticos, sino métodos adecuados para estudiar y para aumentar la creatividad académica. Con tal fin presentamos ahora un libro de análisis matemático bajo una nueva orientación, en el cual, a través de abundantes ejemplos y ejercicios, los lectores mismos puedan construir su propia teoría matemática del análisis, alcanzando paulatinamente un nivel avanzado. Naturalmente el desarrollo de la materia no es tan rápido como en otros libros. Se adoptan los procesos más naturales sacrificando de vez en cuando la elegancia. Además, el libro abarca solamente los conceptos básicos de la materia absteniéndose de tratar otros temas. Lo que pretendemos ofrecer en este libro, no es conocimientos matemáticos sino formar capacidad para los estudios posteriores e incrementar la creatividad. Una vez que los estudiantes dominen la parte fundamental del análisis, ellos pueden adquirir fácilmente más conocimientos matemáticos con otros libros para completar sus estudios (ver bibliografía). Esperamos que el presente libro pueda ser útil para los principiantes que todavía no tienen familiaridad para entrar al mundo matemático abstracto. Puede ser un poco aburrido para los genios que ya poseen capacidad de abstracción.

A pesar de que el contenido del primer capítulo (número de elementos de un conjunto), está incluido en el pensum del bachillerato, es aconsejable dar una lectura rápida del Apéndice (Sistemas numéricos) y del primer capítulo antes de entrar al capítulo II, aún para estudiantes conocedores de estos temas. Aunque no es indispensable dedicarle muchos esfuerzos. Generalmente la mayoría de los ejercicios colocados en la última parte de cada párrafo y los ejercicios adicionales, son de nivel muy elevado. es conveniente saltarlos, según la capacidad de los lectores, puesto que aprender de memoria la solución de los problemas sin poder digerirlos bien, puede ser perjudicial para el desarrollo intelectual de los estudiantes en el futuro.

En el capítulo I y el Apéndice, fueron publicados anteriormente en el Boletín de Matemáticas vol. VIII N° 2 y N° 3 (Publicación bimestral del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia). El primer borrador de los capítulos II y III fue escrito en el Departamento de Matemáticas de la Facultad e Minas (Medellín) cuando dicte un curso de visita en 1973. Quiero manifestar mis sinceros agradecimientos a todas las personas que me brindaron la colaboración y apoyo a este trabajo.

No puedo olvidar que la presente realización ha contado con la valiosa ayuda de mi colega, Dr. Eduardo Mantilla quien efectuó la tediosa labor de revisión y corrección del original, le estoy sinceramente agradecido.

Yu Takeuchi

Febrero de 1974

En la 4ª edición de este libro traté de corregir los errores encontrados; además agregue un modelo del examen final de la materia, con el fin de utilizarlo para el autodiagnóstico académico del lector.

1978

El autor

# 1

## Número de elementos de un conjunto

### 1.1. Introducción

El concepto de *Número de elementos* de un conjunto está incluido en el plan de estudios de 2º de bachillerato; sin embargo, aún para estudiantes avanzados de la *carrera de Matemáticas*, este concepto no es fácil de dominar.

En la figura 1.1 se muestra un conjunto de frutas; los niños de kínder saben ya que aquí hay *tres* frutas. Analicemos cómo las cuentan:



Figura 1.1.

Algunos niños las contarán como se muestra en la figura 1.2, otros niños la contarán como en la figura 1.3, ó la figura 1.4 en cualquier caso, siempre hay que establecer una correspondencia de las frutas a los números naturales sucesivos (representados convenientemente por los dedos) *uno, dos y tres*, de tal manera que a cada fruta se le asigna *un sólo número*; así que obtiene el número tres como el último número en estas correspondencias (en la figura 1.2 el número correspondiente a la naranja, en la figura 1.3 el número correspondiente a la

manzana, y en la figura 1.4 el número correspondiente a la pera) y esto es precisamente *el número de frutas*.

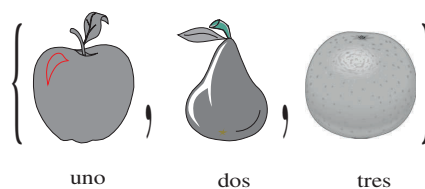


Figura 1.2.

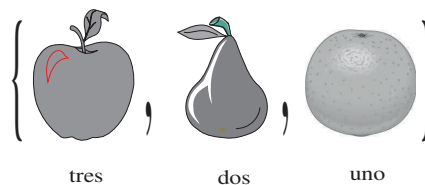


Figura 1.3.

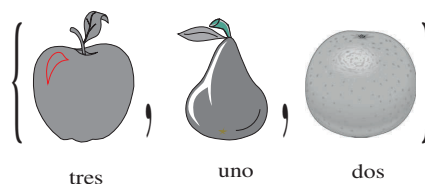


Figura 1.4.

A continuación estudiaremos matemáticamente el mecanismo intuitivo del *contar* observado anteriormente.

## 1.2. Equivalencia (o equipotencia) de dos conjuntos

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  decimos que  $A$  es *equivalente* (o *equipotente*) a  $B$  si es posible establecer una correspondencia *uno a uno* entre los elementos de  $A$  y de  $B$  (en otras palabras, si existe una función uno a uno de  $A$  sobre  $B$ ) y se nota:

$$A \sim B.$$

En el ejemplo del párrafo anterior, la figura 1.2(o las figuras 1.3 y 1.4) nos muestra que el conjunto de frutas es equivalente al conjunto numérico  $\{1, 2, 3\}$ .

**Ejemplo 1.**

*Demostrar la equivalencia de los intervalos:*

$$(i) (0, 1) \sim (a, b)$$

$$(ii) (0, 1) \sim (a, \infty)$$

$$(iii) (0, 1) \sim (-\infty, \infty)$$

*Demostación.*

(i) Considerar la correspondencia  $f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$  definida por

$$x \in (0, 1), f(x) = a + x(b - a) \in (a, b).$$

(ii) Considerar la correspondencia  $g : (0, 1) \rightarrow (a, \infty)$  definida por:

$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{x} - 1,$$

$$x \in (0, 1), g(x) = \frac{1}{x} - 1 \in (0, \infty).$$

(iii) Considerar la función  $b : (0, 1) \rightarrow (-\infty, \infty)$  definida por

$$b(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{1-x} - 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

para cada  $x \in (0, 1)$ .

Dejamos al lector la comprobación de que estas funciones  $f, g$  y  $h$  son *uno a uno*.

**Ejercicio 1.**

*Demostrar que*

$$(i) A \sim A.$$

$$(ii) \text{ Si } A \sim B \text{ entonces } B \sim A.$$

(iii) Si  $A \sim B$ ,  $B \sim C$  entonces  $A \sim C$ .

*Demostación.*

(i) Sea  $f$  la función **idéntica** definida en  $A$ :

$$f(x) = x \text{ para todo } x \in A.$$

Entonces  $f$  es uno a uno y sobre, por lo tanto se tiene que  $A \sim A$ .

(ii) Si  $A \sim B$  existe una función  $g$ , de  $A$  sobre  $B$  y uno a uno. La función inversa  $g^{-1}$  existe, es uno a uno y

$$g^{-1}(B) = A.$$

Por lo tanto se tiene que  $B \sim A$ .

(iii) Si  $A \sim B$ ,  $B \sim C$  existen dos funciones,  $g$  y  $b$ , uno a uno tales que:

$$g(A) = B, \quad b(B) = C.$$

Dejamos al lector la comprobación de que la función compuesta  $b \circ g$  nos garantiza la equivalencia de  $A$  y  $C$ .

### **Ejercicio 2.**

Supóngase que  $A \sim A_1$  y  $B \sim B_1$ . Demostrar:

(i)  $A \times B \sim A_1 \times B_1$ .

(ii) Si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A_1 \cap B_1 = \emptyset$  entonces  $A \cup B \sim A_1 \cup B_1$ .

*Demostación.*

Sea  $f$  una aplicación uno a uno de  $A$  sobre  $A_1$  y  $g$  una aplicación uno a uno de  $B$  sobre  $B_1$ .

(i) Definamos una aplicación  $F$  de  $A \times B$  en  $A_1 \times B_1$ , en la forma siguiente:

$$F(x, y) = (f(x), g(y)) : x \in A, y \in B.$$

Si  $F(x, y) = F(x_1, y_1)$  se tiene:

$$(f(x), g(y)) = (f(x_1), g(y_1))$$

o sea que

$$f(x) = f(x_1), \quad g(y) = g(y_1).$$

Esto es,  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ , por lo tanto  $F$  es uno a uno. dejamos al lector la comprobación de que  $F$  es sobre.

(ii) Consideremos la siguiente aplicación  $G$  de  $A \cup B$  en  $A_1 \cup B_1$ :

$$\begin{cases} G(x) = f(x) & \text{si } x \in A \\ G(y) = g(y) & \text{si } y \in B. \end{cases}$$

El lector puede demostrar que  $G$  es uno a uno y sobre.

### Ejercicio 3.

*Demostrar la equivalencia de los intervalos:*

$$[0, \infty) \sim (-\infty, \infty) \sim (0, \infty).$$

*Demostación.*

Por el ejemplo 1 y el ejercicio 1 basta demostrar que

$$[0, \infty) \sim (-\infty, \infty).$$

Consideremos la función  $g : [0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } x \in [2n, 2n + 1), \text{ donde } n = 0, 1, 2, \dots \\ x - 3n + 1 & \text{si } x \in [2n - 1, 2n), \text{ donde } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

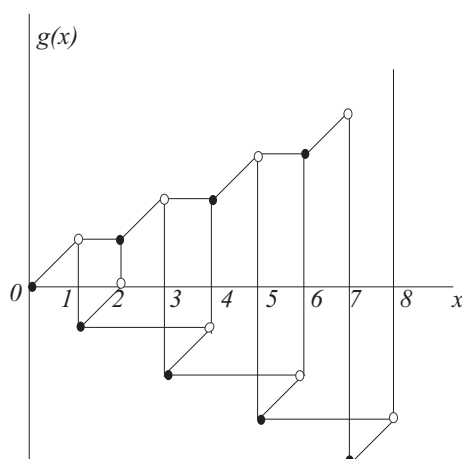


Figura 1.5.

Dejamos al lector la comprobación de que esta función  $g$  nos garantiza la equivalencia de  $[0, \infty)$  y  $(-\infty, \infty)$ .

**Ejercicio 4.**

*Demostrar que si*

$$A \sim \{1, 2, 3, \dots, m\} \text{ y } A \sim \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

*entonces*  $m = n$ .

*Demostación.*

Por el ejercicio 1 se tiene que

$$\{1, 2, 3, \dots, m\} \sim \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

o sea que existe una aplicación  $f$  uno a uno tal que

$$f(\{1, 2, 3, \dots, m\}) = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

$f(m)$  es un número natural entre 1 y  $n$ , la aplicación  $f$  establece la siguiente equivalencia:

$$\{1, 2, 3, \dots, m-1\} \sim \{1, 2, 3, \dots, n\} - \{f(m)\}.$$

Pero (Figura 1.6)

$$\{1, 2, 3, \dots, m\} - \{f(m)\} \sim \{1, 2, 3, \dots, n-1\}, \quad (2)$$

luego:

$$\{1, 2, 3, \dots, m-1\} \sim \{1, 2, 3, \dots, n-1\}, \quad (3)$$

y así sucesivamente, si  $m \geq n$  tenemos:

$$\{1, 2, 3, \dots, m-n+1\} \sim \{1\},$$

esto es

$$m = n$$

ya que  $m-n+1 = 1$ .

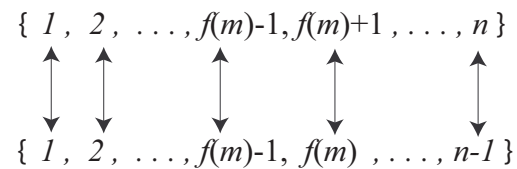


Figura 1.6.

Si un conjunto  $A$  es equivalente al conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  decimos que  $A$  es un conjunto finito y que  $A$  tiene  $m$  elementos (ó que  $m$  es el número de elementos del conjunto  $A$ ). De acuerdo con el ejercicio 4; el número de elementos está bien definido, en términos más intuitivos, el número de elementos de un conjunto es *independiente* de la manera de *contarlos*, según se observó en el párrafo anterior.

### Ejemplo 2.

*Un conjunto acotado de números naturales es finito.*

*Demostación.*

Sea  $A$  un conjunto acotado de números naturales, sean:

$$\begin{aligned} a(1) &= \text{el mínimo de } A \\ a(2) &= \text{el mínimo de } A - \{a(1)\} \\ a(3) &= \text{el mínimo de } A - \{a(1), a(2)\}. \end{aligned}$$

Si  $M$  es una cota del conjunto  $A$ , el procedimiento debe acabar al cabo de a lo más,  $M$  pasos; o sea que existe  $m (m \leq M)$  tal que  $a(m) =$  el mínimo de  $A - \{a(1), a(2), \dots, a(m-1)\}$  y  $A = \{a(1), a(2), \dots, a(m)\}$ .

Es evidente que  $A$  es un conjunto finito de  $m$  elementos.

### Ejemplo 3.

*Sea  $\mathbb{N}$  el conjunto de todos los números naturales. Entonces  $\mathbb{N}$  es infinito.*

*Demostación.*

Supongamos que  $\mathbb{N}$  fuera finito, entonces existiría una  $m$  tal que

$$\mathbb{N} \sim \{1, 2, 3, \dots, m\}.$$

Por un procedimiento similar a la solución del ejercicio 3 se tendría:

$$\mathbb{N} \sim \{1, 2, 3, \dots, m-1\} \sim \{1\}.$$

Esto es imposible ya que  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  tiene dos elementos distintos, por ejemplo 1 y 2.

### Ejercicio 5.

*Sean  $A, B$  dos conjuntos finitos disyuntos de  $m, k$  elementos respectivamente. Demostrar que  $A \cup B$  tiene  $m + k$  elementos.*

*Demostación.*

Tenemos:

$$A \sim \{1, 2, \dots, m\} \text{ y } B \sim \{1, 2, \dots, k\}.$$

Evidentemente se tiene:

$$B \sim \{1, 2, \dots, k\} \sim \{m+1, m+2, \dots, m+k\},$$

luego (Figura 1.7):

$$\begin{aligned} A \cup B &\sim \{1, 2, \dots, m\} \cup \{(m+1), (m+2), \dots, (m+k)\} \\ &= \{1, 2, 3, \dots, m+k\}. \end{aligned}$$

dejamos al lector los detalles de la demostración.

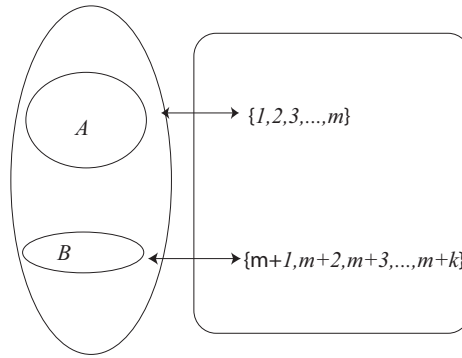


Figura 1.7.

### Ejercicio 6.

*Demostrar que cualquier subconjunto ni vacío de un conjunto finito es finito.*

*Demostación.*

Sea  $m$  el número de elementos de un conjunto finito  $A$ . Si  $B \subset A$  entonces  $B$  es equivalente a un subconjunto de  $\{1, 2, \dots, m\}$  digamos  $S$ . Por el ejemplo 2 se tiene que  $S$  es finito, por lo tanto  $B$  es finito.

### Ejercicio 7.

*Demostrar que un conjunto finito no es equivalente a ningún subconjunto propio.*

*Demostación.*

Sea  $B$  un subconjunto propio (no vacío) de un conjunto finito  $A$ , entonces

$$A = B \cup (A - B), \quad A - B \neq \emptyset.$$

Si  $m(A)$ ,  $m(B)$ ,  $m(A - B)$  son los números de elementos de los conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $A - B$  respectivamente, entonces, por ejercicio 5 tenemos:

$$m(A) = m(B) + m(A - B).$$

Esto es:

$$m(A) > m(B),$$

o sea que  $A$  y  $B$  no son equivalentes.

### **Ejercicio 8.**

Sea  $A$  un conjunto finito y  $B$  un subconjunto de  $A$ . Supongamos que  $m(A)$  y  $m(B)$  designan el número de elementos de  $A$  y de  $B$  respectivamente, demostrar que:

$$A = B \quad \text{si y sólo si} \quad m(A) = m(B).$$

*Sugerencia.* Por el ejercicio 7 se tiene que:

$$\text{si } B \neq A \quad \text{entonces} \quad m(B) < m(A).$$

### **Ejercicio 9.**

Sea  $A$  un conjunto de  $k$  números naturales. Demuestre que  $A$  tiene la forma:

$$A = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k\},$$

donde

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k, \quad n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbf{N}$$

*Demostación.*

Sea:

$$n_1 = \text{el mínimo de } A,$$

$$n_2 = \text{el mínimo de } A - \{n_1\},$$

$$n_3 = \text{el mínimo de } A - \{n_1, n_2\},$$

...

$$n_k = \text{el mínimo de } A - \{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}\}.$$

El lector debe demostrar que:

(i) Si  $b < k$

$$A - \{n_1, n_2, \dots, n_b\} \neq \emptyset.$$

(ii)

$$A = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}.$$

**Ejercicio 10.**

*Demostrar que un conjunto finito de números naturales tiene un elemento máximo.*

*Sugerencia.* Aplicar el ejercicio 9.

**Ejercicio 11.**

*Demostrar que la unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito.*

*Sugerencia.* Sean  $A, B$  finitos entonces

$$A \cup B = A \cup (B - A).$$

Aplicar el ejercicio 5 el ejercicio 6.

**Ejercicio 12.**

*Demostrar que la unión de un número finito de conjuntos finitos es finito.*

Dejamos la demostración al lector.

### 1.3. Conjuntos Infinitos

Se dice que un conjunto (no vacío) es infinito si *no es finito*. En el ejemplo 3 hemos visto que  $\mathbb{N}$  es infinito.

**Ejemplo 4.**

*Los conjuntos numéricos  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  son infinitos.*

*Demostación.*

Si  $\mathbb{Z}$  (ó  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ) fuera finito entonces  $\mathbb{N}$  sería finito ya que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  (Ejercicio 5).

**Ejercicio 13.**

*Demostrar que conjunto infinito si posee un subconjunto infinito.*

*Sugerencia.* Si el conjunto fuera finito, cualquier subconjunto sería finito. (Ejercicio 6)

**Ejercicio 14.**

*Cualquier conjunto infinito contiene un subconjunto equivalente a  $\mathbb{N}$ .*

*Demostación.*

Sea  $A$  un conjunto infinito.

Como  $A$  no es vacío, existe un elemento de  $A$ , digamos  $a_1$ . Ahora bien,  $A - \{a_1\}$  no es vacío (si  $A - \{a_1\}$  fuera vacío  $A$  sería finito contra la hipótesis). Luego existe un elemento de  $A - \{a_1\}$ , digamos  $a_2$ . Y así sucesivamente. En general el conjunto

$$A - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

no es vacío, luego existe  $a_{n+1} \in A - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

El conjunto  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  es equivalente a  $\mathbb{N}$  y

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset A.$$

Decimos que un conjunto  $A$  es *contablemente* (ó *enumerablemente*) infinito si  $A \sim \mathbb{N}$ . Un conjunto es *contable* (ó *numerable*) si es vacío, ó finito ó contablemente infinito.

Si  $A$  es contablemente infinito existe una correspondencia (ó aplicación) uno a uno entre  $A$  y  $\mathbb{N}$ . Sea  $a_1$  el elemento de  $A$  correspondiente a  $1 \in \mathbb{N}$  por esta aplicación  $a_2$  el elemento de  $A$  correspondiente a  $2 \in \mathbb{N}$  y en general,  $a_n$  el elemento de  $A$  correspondiente a  $n \in \mathbb{N}$  (Figura 1.8). En otras palabras, todos los elementos del conjunto  $A$  pueden ser marcados por subíndices naturales.

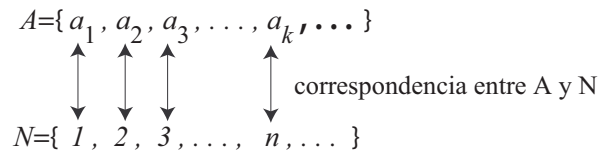


Figura 1.8.

Nótese que  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$  en esta expresión del conjunto  $A$  puesto que la correspondencia es *uno a uno*. Análogamente, si  $B$  es un conjunto finito de  $k$  elementos tenemos:

$$\begin{array}{c}
 B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \\
 \downarrow \downarrow \quad \downarrow \\
 \{1, 2, \dots, k\}.
 \end{array}$$

El ejercicio 14 puede formularse como sigue:

Cualquier conjunto infinito tiene un subconjunto *contablemente infinito*.

Se puede expresar este hecho en forma intuitiva diciendo que los conjuntos contables son *más pequeños* que todos los otros conjuntos infinitos. En resumen:

$$\begin{array}{l}
 \{\text{conjunto vacío}\} \longleftrightarrow \text{no tiene elementos} \\
 \{\text{conjuntos finitos}\} \sim \{1, 2, 3, \dots, m\} \\
 \{\text{conjuntos infinitos contables}\} \sim \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \\
 \{\text{conjuntos infinitos no contables}\}.
 \end{array}$$

### Ejemplo 5.

(i)  $\mathbb{Z}$  es enumerable ya que la siguiente aplicación  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  es uno a uno

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 1, \quad f(n) = 2n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\
 f(-n) &= 2n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

(ii)  $A = \{2, 4, 6, \dots\}$  es contablemente infinito ya que la aplicación

$$g : g(2n) = n \text{ de } A \text{ sobre } \mathbb{N} \text{ es uno a uno.}$$

### Ejercicio 15.

Cualquier subconjunto de un conjunto contable es contable.

*Demostación.*

Basta demostrar que cualquier subconjunto de  $\mathbb{N}$  es contable.

Sea  $A \subset \mathbb{N}$ , si  $A$  es finito o vacío entonces  $A$  es contable por *definición*. Si  $A$  es infinito,  $A$  es de la forma (ver ejercicio 9):

$$A = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}, \quad n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

o sea que  $A$  es contable.

**Ejercicio 16.**

Si  $A$  es infinito entonces  $A$  es equivalente a alguno de sus subconjuntos propios.

**Nota 1.** Esta propiedad, combinada con el ejercicio 7, caracteriza los conjuntos infinitos. Es decir un conjunto  $A$  es infinito si y sólo si  $A$  es equivalente a alguno de sus subconjuntos propios.

*Demostación.*

Por el ejercicio 14, existe un subconjunto de  $A$ , enumerablemente infinito, por ejemplo:

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\} \subset A.$$

Definamos la siguiente aplicación  $f$  :

- (i)  $f$  es idéntica en  $A - B$  ( $A - B$  puede ser vacío)
- (ii)  $f(b_n) = b_{2n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Evidentemente  $f$  es uno a uno y su recorrido es:

$$(A - B) \cup \{b_2, b_4, b_6, \dots\}$$

lo cual constituye un subconjunto *propio* de  $A$ . (Ver figura 1.9)

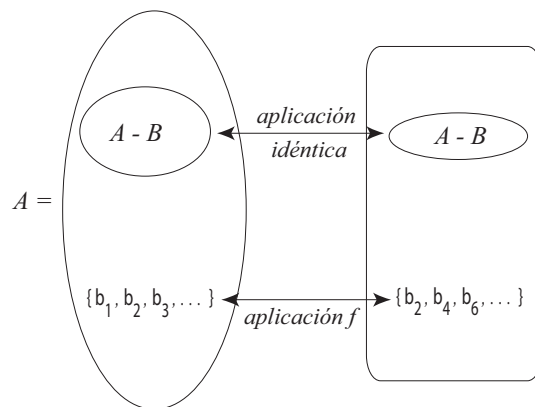


Figura 1.9.

**Ejercicio 17.**

La unión de dos conjuntos contables es contable.

*Demostación.*

Sean  $A, B$  dos conjuntos contables.

(i) Suponemos primero que  $A$  y  $B$  son disyuntos.

Si  $A$  y  $B$  son finitos entonces  $A \cup B$  es finito, luego es contable.

Si  $A$  y  $B$  son infinitos digamos:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

entonces:

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_n, b_n, \dots\}$$

por lo tanto  $A \cup B$  es contablemente infinito.

Si  $A$  es finito y  $B$  es infinito:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\},$$

por lo tanto  $A \cup B$  es contablemente infinito.

(ii) Caso general. Tenemos:

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

donde  $B - A$  es contable (ejercicio 15), como  $A$  y  $B - A$  son disyuntos se tiene que  $A \cup (B - A)$  es contable.

### **Ejercicio 18.**

*La unión de un número finito de conjuntos contables es contable.*

La demostración la dejamos para el lector.

### **Ejercicio 19.**

*Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos contables, entonces  $A \times B$  (el producto cartesiano de  $A$  y  $B$ ) es contable.*

*Demostación.*

(i) Suponemos que  $A$  y  $B$  son infinitos, entonces:

$$\begin{aligned} A &\sim \mathbb{N} \sim \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ B &\sim \mathbb{N} \sim \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

luego:

$$A \times B \sim \{(2^n, 3^k) \mid n, k \in \mathbb{N}\} \sim \{2^n 3^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}.$$

Como  $\{2^n 3^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$  es un subconjunto de  $\mathbb{N}$ , entonces es contable, por lo tanto  $A \times B$  es contable.

- (ii) Caso general. Sean  $A_0 = A \cup \mathbb{N}$  y  $B_0 = B \cup \mathbb{N}$ . Entonces  $A_0, B_0$  son contablemente infinitos (Ejercicio 17), luego se tiene que  $A_0 \times B_0$  es contable (parte (i)). Como  $A \times B \subset A_0 \times B_0$ , por el ejercicio 15 tenemos que  $A \times B$  es contable.

### Ejercicio 20.

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_p$  conjuntos contables. Entonces el producto cartesiano  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p$  es contable.

La demostración la dejamos para el lector.

### Ejercicio 21.

Sea  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una colección contable de conjuntos contables, entonces la unión total  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  es contable.

*Demostación.*

Utilizando la técnica empleada en la demostración del ejercicio 19 se puede suponer que  $A_j$  es contablemente infinito para todo  $j$ .

- (i) Supongamos que  $A_1, A_2, A_3, \dots$  son disyuntos.

Sean:

$$A_j = \{a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, a_3^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}, \dots\}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Consideremos la aplicación  $f : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definida por:

$$f(a_n^{(j)}) = (j, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

El lector puede comprobar fácilmente que  $f$  es uno a uno y sobre. Por lo tanto

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}.$$

(ii) Caso general. Sean

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 - A_1 \\ B_3 &= A_3 - (A_1 \cup A_2) \\ &\dots \\ B_n &= A_n - (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Como  $B_n$  es contable para todo  $n$  se tiene que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  es contable (parte (i)) por lo tanto  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  es contable.

### Ejercicio 22.

El conjunto  $\mathbb{Q}$  de todos los números racionales es contable.

*Sugerencia.* El conjunto  $\mathbb{Q}$  es equivalente a un subconjunto de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

### Ejercicio 23.

Sea  $A$  un conjunto de intervalos de  $\mathbb{R}$  abiertos y disyuntos dos a dos. entonces  $A$  es contable.

*Demostación.*

Como  $\mathbb{Q}$  es contable podemos escribir:

$$\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Si  $(a, b) \in A$ , el conjunto de números naturales  $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in (a, b)\}$  no es vacío puesto que  $\mathbb{Q}$  es *denso* en toda parte. Al intervalo  $(a, b)$  le asignamos el siguiente número natural:

$$\text{el mínimo de } \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in (a, b)\}.$$

Así se puede establecer una correspondencia entre los intervalos del conjunto  $A$  y un subconjunto de  $\mathbb{N}$ , evidentemente esta correspondencia es uno a uno ya que los intervalos de  $A$  son disyuntos.

**Ejercicio 24.**

Sea  $B$  un conjunto de intervalos cerrados con longitud positiva y disyuntos dos a dos. demostrar que  $B$  es contable.

*Sugerencia.* Similar al ejercicio 23.

**Ejercicio 25.**

Mostrar que:

- (I) En  $\mathbb{R}^n$  (o en  $\mathbb{R}^2$ ) el conjunto de todos los puntos de coordenadas racionales es contable.
- (II) Una colección de círculos disyuntos con radio positivo es contable.
- (III) Una colección de esferas disyuntas con radio positivo es contable.

La demostración la dejamos al lector.

**Ejercicio 26.**

Sea  $S$  la colección de todos los polinomios de coeficientes racionales, entonces  $S$  es contable.

*Sugerencia.* Sea  $S_n$  la colección de todos los polinomios con coeficientes racionales de grado  $n$ , entonces

$$S_n \sim \mathbb{Q}^{n+1} \sim \mathbb{N}^{n+1} \sim \mathbb{N},$$

luego:

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \sim \mathbb{N} \quad (\text{Ejercicio 21}).$$

**Ejercicio 27.**

Sea  $f$  una función de valor real definida en  $[0, 1]$  y supongamos que existe una constante  $M > 0$  tal que para toda sucesión finita de puntos distintos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  se tiene la desigualdad:

$$|f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)| \leq M;$$

demostrar que el conjunto

$$S = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \neq 0\}$$

es contable.

*Demostación.*

Sean  $S_+ = \{x \in [0, 1] \mid f(x) > 0\}$  y  $S_- = \{x \in [0, 1] \mid f(x) < 0\}$  entonces

$$S = S_+ \cup S_-. \quad (\text{i})$$

Sea

$$S_n = \left\{x \in [0, 1] \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

entonces tenemos:

$$S_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n. \quad (\text{ii})$$

Si  $x_1, x_2, \dots, x_k$  son puntos disyuntos de  $S_n$  entonces

$$|f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)| = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) \leq M,$$

luego:

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} < f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) \leq M,$$

es decir,

$$k < n \cdot M.$$

Esto es, el conjunto  $S_n$  contiene a lo más  $n \cdot M$  puntos distintos, o sea que  $S_n$  es finito (contable). Por lo tanto  $S_+$  es contable. De la misma forma, se ve que  $S_-$  es contable. Luego  $S$  es contable.

El lector debe comprobar las identidades (i) y (ii).

### **Ejercicio 28.**

Sea  $A$  un conjunto finito. Demostrar que la colección de todas las funciones de  $A$  en  $\mathbb{N}$  es contablemente infinito.

*Sugerencia.* Sea  $m$  el número de elementos del conjunto  $A$ , entonces la colección de todas las funciones de  $A$  en  $\mathbb{N}$  es equivalente a  $\mathbb{N}^m$ .

## **1.4. Conjuntos no contables (no numerables)**

### **Ejemplo 6.**

El conjunto  $\mathbb{R}$  de todos los números reales no es contable.