

# Premiers pas en simulation

**Springer**

*Paris*

*Berlin*

*Heidelberg*

*New York*

*Hong Kong*

*London*

*Milan*

*Tokyo*

Yadolah Dodge  
Giuseppe Melfi

# Premiers pas en simulation

 Springer

## **Yadolah Dodge**

Professeur honoraire  
Université de Neuchâtel  
Suisse  
yadolah.dodge@unine.ch

## **Giuseppe Melfi**

Chargé de cours  
Université de Neuchâtel  
Suisse  
giuseppe.melfi@unine.ch

ISBN : 978-2-287-79493-3 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag France, 2008  
Imprimé en France

Springer-Verlag France est membre du groupe Springer Science + Business Media

Cet ouvrage est soumis au copyright. Tous droits réservés, notamment la reproduction et la représentation la traduction, la réimpression, l'exposé, la reproduction des illustrations et des tableaux, la transmission par voie d'enregistrement sonore ou visuel, la reproduction par microfilm ou tout autre moyen ainsi que la conservation des banques de données. La loi française sur le copyright du 9 septembre 1965 dans la version en vigueur n'autorise une reproduction intégrale ou partielle que dans certains cas, et en principe moyennant le paiement de droits. Toute représentation, reproduction, contrefaçon ou conservation dans une banque de données par quelque procédé que ce soit est sanctionnée par la loi pénale sur le copyright.

L'utilisation dans cet ouvrage de désignations, dénominations commerciales, marques de fabrique, etc. même sans spécification ne signifie pas que ces termes soient libres de la législation sur les marques de fabrique et la protection des marques et qu'ils puissent être utilisés par chacun.

La maison d'édition décline toute responsabilité quant à l'exactitude des indications de dosage et des modes d'emploi. Dans chaque cas, il incombe à l'utilisateur de vérifier les informations données par comparaison à la littérature existante.

*Maquette de couverture : Jean-François Montmarché*



**Collection**  
**Statistique et probabilités appliquées**  
**dirigée par Yadolah Dodge**

Professeur Honoraire  
Université de Neuchâtel  
Suisse  
yadolah.dodge@unine.ch

**Comité éditorial :**

**Christian Genest**

Département de Mathématiques  
et de statistique  
Université Laval  
Québec G1K 7P4  
Canada

**Stephan Morgenthaler**

École Polytechnique Fédérale  
de Lausanne  
Département des Mathématiques  
1015 Lausanne  
Suisse

**Marc Hallin**

Université libre de Bruxelles  
Campus de la Plaine CP 210  
1050 Bruxelles  
Belgique

**Gilbert Saporta**

Conservatoire national  
des arts et métiers  
292, rue Saint-Martin  
75141 Paris Cedex 3  
France

**Ludovic Lebart**

École Nationale Supérieure  
des Télécommunications  
46, rue Barrault  
75634 Paris Cedex 13  
France

**Dans la même collection :**

- *Statistique. La théorie et ses applications*  
Michel Lejeune, avril 2004
- *Le choix bayésien. Principes et pratique*  
Christian P. Robert, novembre 2005
- *Maîtriser l'aléatoire. Exercices résolus de probabilités et statistique*  
Eva Cantoni, Philippe Huber, Elvezio Ronchetti, novembre 2006
- *Régression. Théorie et applications*  
Pierre-André Cornillon, Eric Matzner-Løber, janvier 2007
- *Le raisonnement bayésien. Modélisation et inférence*  
Éric Parent, Jacques Bernier, juillet 2007
- *Génétiq ue statistique*  
Stephan Morgenthaler, juillet 2008

# Préface

La simulation a une grande importance dans le monde d'aujourd'hui. Le développement technologique dans les domaines les plus disparates demande souvent des simulations à grande échelle qui se révèlent essentielles pour la conception de projets ou la mise en place de stratégies d'action. C'est pourquoi elle est enseignée dans les plus prestigieuses universités et écoles polytechniques de la planète.

Toutefois, nous nous sommes aperçus que la plupart des ouvrages disponibles, que ce soit en anglais ou en français, s'adressent à un public de spécialistes, et supposent que le lecteur possède un bagage de connaissances en statistique mathématique déjà bien développé. Bref, il n'est pas difficile d'imaginer qu'un lecteur peu habitué à un langage mathématique trouve la plupart de ces excellents ouvrages de lecture difficile, et qu'après avoir passablement peiné dans leur lecture il se décourage pour ne pas dire qu'il abandonne, en jugeant la matière et son exposition trop technique, voire incompréhensible.

Ce livre est le fruit d'années d'enseignement dans le deuxième cycle à la faculté de sciences économiques de l'université de Neuchâtel. Il s'adresse à un public de non-spécialistes, et, pour un étudiant ou un doctorant qui veut s'initier aux techniques de simulation, ce livre avec son langage simple et par son contenu de base qui le rend quasi autosuffisant peut être une introduction à la simulation et aux méthodes de Monte Carlo.

Une brève introduction à la probabilité peut être utile pour ceux qui auraient besoin de quelques rappels. Avec une présentation de concepts fondamentaux on permet aussi la lecture à un public d'informaticiens, d'ingénieurs, ou de mathématiciens qui n'ont pas tous nécessairement des bases en statistique. Le lecteur est ensuite guidé à travers des exemples où les différentes techniques sont appliquées.

Chaque chapitre est suivi d'un certain nombre d'exercices, dont certains demandent l'utilisation d'un logiciel pour le calcul statistique, ce qui pourra être apprécié par la majorité du public visé.

La bibliographie à la fin de l'ouvrage énumère les travaux qui, au cours du XX<sup>e</sup> siècle, ont permis l'essor de la simulation. Elle répertorie aussi d'autres contributions scientifiques consacrées à des aspects plus détaillés de la théorie.

Neuchâtel, le 2 mars 2008

Yadolah Dodge  
Giuseppe Melfi

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Pourquoi des techniques de simulation? . . . . .	1
1.2 Une brève histoire de la notion de « hasard » . . . . .	2
1.3 Systèmes, modèles et méthodes de résolution . . . . .	3
1.4 Un phénomène de file d'attente . . . . .	6
1.5 Un problème de gestion . . . . .	7
1.6 Exemple d'une surface à calculer . . . . .	9
Exercices . . . . .	12
<b>2 Éléments de probabilités</b>	<b>13</b>
2.1 Introduction . . . . .	13
2.2 Variables aléatoires discrètes . . . . .	14
2.2.1 La loi de Bernoulli . . . . .	17
2.2.2 La loi binomiale . . . . .	17
2.2.3 La loi géométrique . . . . .	18
2.2.4 La loi binomiale négative . . . . .	18
2.2.5 La loi de Poisson . . . . .	19
2.3 Variables aléatoires continues . . . . .	21
2.3.1 La loi uniforme . . . . .	22
2.3.2 La loi exponentielle . . . . .	24
2.3.3 La loi normale . . . . .	25
2.3.4 La loi gamma . . . . .	27
2.3.5 La loi du chi-carré . . . . .	28
2.3.6 La loi de Student . . . . .	29
2.3.7 La loi de Fisher . . . . .	30
2.3.8 Autres lois de distributions . . . . .	30
2.4 Les lois bivariées . . . . .	31
2.4.1 Cas discret . . . . .	31
2.4.2 Cas continu . . . . .	32
2.4.3 Cas particulier : la loi normale bivariée . . . . .	32
Exercices . . . . .	34

<b>3</b>	<b>Nombres aléatoires</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	37
3.2	Nombres aléatoires et pseudo-aléatoires . . . . .	37
3.3	La méthode du carré médian . . . . .	39
3.4	Les méthodes de congruence . . . . .	40
3.4.1	La méthode de congruence simple . . . . .	40
3.4.2	La méthode de congruence avec retard . . . . .	43
3.4.3	La méthode de congruence avec mélange . . . . .	45
3.4.4	La méthode de l'inverse en congruences . . . . .	47
3.5	La méthode du registre à décalage avec rétroaction linéaire . .	48
3.6	L'évolution des générateurs . . . . .	48
3.7	Le nombre $\pi$ comme générateur naturel de nombres aléatoires .	49
	Exercices . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Transformations de variables et simulation d'échantillons</b>	<b>53</b>
4.1	Transformations de variables . . . . .	53
4.1.1	Variables aléatoires discrètes . . . . .	53
4.1.2	Variables aléatoires continues . . . . .	56
4.2	Génération de nombres aléatoires suivant une loi normale . . .	63
4.3	La méthode du rejet . . . . .	66
4.4	La méthode de comparaison . . . . .	71
4.5	L'échantillonneur de Gibbs . . . . .	74
4.6	L'algorithme de Metropolis-Hastings . . . . .	76
4.7	Échantillonnage . . . . .	78
4.7.1	Échantillonnage aléatoire sans remise . . . . .	79
4.7.2	Échantillonnage aléatoire avec remise . . . . .	79
4.7.3	La distribution d'échantillonnage d'un estimateur . . . .	80
4.8	Rééchantillonnage . . . . .	84
4.8.1	Le principe . . . . .	84
4.8.2	Le bootstrap . . . . .	85
	Exercices . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Tests d'hypothèses et nombres aléatoires</b>	<b>89</b>
5.1	Introduction . . . . .	89
5.2	Tests d'hypothèses . . . . .	90
5.3	Définitions et rappels . . . . .	91
5.3.1	Puissance d'un test . . . . .	93
5.4	Tests statistiques . . . . .	95
5.4.1	Le test du $\chi^2$ . . . . .	95
5.4.2	Le test de Student et le test de Fisher . . . . .	100
5.4.3	Le test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	101
5.4.4	Le test d'Anderson-Darling . . . . .	102
5.4.5	Le test des permutations . . . . .	106
5.5	Tests et qualité des générateurs . . . . .	106
	Exercices . . . . .	107

---

<b>6</b>	<b>La méthode de Monte Carlo et ses applications</b>	<b>111</b>
6.1	Introduction . . . . .	111
6.2	Estimation d'une surface . . . . .	111
6.3	Problèmes de files d'attente . . . . .	113
6.4	Ajustement de l'offre d'un bien en fonction des conditions climatiques . . . . .	116
6.4.1	Le modèle . . . . .	117
6.4.2	La simulation . . . . .	118
6.5	Estimation d'une valeur d'intégrale . . . . .	120
6.6	Gestion de stocks . . . . .	124
6.7	Analyse de la rentabilité d'un investissement . . . . .	126
	Exercices . . . . .	129
<b>7</b>	<b>Simulation assistée par ordinateur</b>	<b>135</b>
7.1	Un cas d'estimation d'une surface . . . . .	135
7.2	Une simulation d'une file d'attente . . . . .	137
7.3	Échantillonnage d'une surface non plane . . . . .	141
7.4	Intégrales multiples . . . . .	146
	Exercices . . . . .	148
	<b>Appendice : Tables</b>	<b>149</b>
	<b>Références</b>	<b>157</b>
	<b>Index</b>	<b>161</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Pourquoi des techniques de simulation ?

Les méthodes de simulation, conçues pour être utilisées en statistique et en recherche opérationnelle, ont connu et connaissent encore un développement rapide dû à l'extraordinaire évolution des ordinateurs. Des applications se rencontrent tant dans l'industrie qu'en économie, ou encore en sciences sociales, en physique des particules, en astronomie et dans de nombreux autres domaines.

Dans beaucoup de situations, que ce soit de la vie courante ou dans la recherche scientifique, le chercheur est confronté à des problèmes dont il recherche des solutions sur la base de certaines hypothèses et contraintes de départ. Pour résoudre ce type de problème, il existe des méthodes analytiques applicables à des situations où le modèle permet de traiter les différentes variables par des équations mathématiquement maniables, et des méthodes numériques où la complexité du modèle impose un morcellement du problème, notamment par l'identification des différentes variables qui entrent en jeu et l'étude de leurs interactions. Cette dernière approche s'accompagne souvent d'une importante masse de calculs. Les techniques de simulation sont des techniques numériques : simuler un phénomène signifie essentiellement reconstituer de façon fictive son évolution.

Après un bref aperçu historique sur l'évolution du concept de hasard et de son usage à travers les siècles, le Paragraphe 1.3 présente la problématique de la simulation est présentée dans toute sa généralité sous ses différents aspects. Les paragraphes suivants montrent des exemples où des techniques de simulation peuvent être appliquées.

La simulation utilise des nombres aléatoires, et les méthodes pour en générer seront abordées au Chapitre 3. Cependant, nous utiliserons déjà des nombres aléatoires dans ce chapitre. Disons simplement pour l'instant que, en tirant un billet d'un chapeau contenant des billets numérotés de 0 à 9, en le remettant dans le chapeau, en mélangeant les 10 billets puis en répétant  $n$  fois cette procédure, on génère  $n$  nombres aléatoires. En faisant la liste des  $n$  nombres

tirés, arrangés par groupes de taille fixée pour en faciliter la lecture, on obtient une table de nombres aléatoires. Notons néanmoins que pour construire des tables contenant des milliers de nombres aléatoires, on utilise des systèmes mécaniques ou des algorithmes bien plus élaborés que cela (voir Chapitre 3).

### 1.2 Une brève histoire de la notion de « hasard »

Le hasard et la chance jouent un rôle central dans la vie de tous les jours et dans une large palette de domaines. La production agricole est une fonction des conditions météorologiques ; le statut économique d'un individu peut être le résultat de son habileté dans le commerce et de son habileté à tisser des bons réseaux sociaux ainsi que de facteurs extérieurs que l'on qualifie généralement de conjoncture économique. Le hasard, comme on l'entend aujourd'hui, a été pendant longtemps une idée abstraite et, pendant des siècles, dans le sens commun largement liée à une explication métaphysique, le destin, ou à une volonté divine.

Historiquement, la première fois que l'humanité a eu à faire avec des nombres aléatoires fut probablement pour des activités divinatoires. Des dés rituels étaient en usage déjà à l'âge du bronze. Le plus ancien dé de forme cubique avec des faces numérotées de 1 à 6 remonte à 2000 ans avant Jésus-Christ et a été trouvé en Égypte. Des dés du VII<sup>e</sup> et du VI<sup>e</sup> siècle avant Jésus-Christ ont été trouvés en Italie centrale et en Chine.

Il n'y a pas de doute que le jeu du lancer des dés est l'un des plus anciens jeux de l'humanité. L'empereur Claude écrivit un livre sur l'art de gagner aux jeux du lancer des dés et, dans le courant du XVII<sup>e</sup> siècle, Chevalier de Méré, un riche parieur français, était en correspondance avec Fermat et Pascal au sujet de nombre de problèmes concernant des combinaisons gagnantes et les paris correspondants dans le jeu des dés.

C'est seulement au cours du XX<sup>e</sup> siècle, avec le développement parallèle des sciences statistiques et de la technologie, que les nombres aléatoires ont trouvé une large application. La célèbre phrase d'Einstein « *Dieu ne joue pas aux dés* » est contemporaine à l'élaboration du principe d'incertitude de Heisenberg. Selon l'idée classique de causalité, pour prédire le futur avec un certain degré de précision, il suffisait de connaître le présent avec suffisamment de précision. Heisenberg démontra la non-prédictibilité des événements en physique quantique. La non-prédictibilité est présente partout. Dans des instituts de prévision météorologique les quantités d'intérêt sont estimées à partir d'un grand nombre d'états initiaux, et l'évolution du phénomène est artificiellement simulée avec des modèles numériques utilisant des nombres aléatoires. Et bien que les capacités de calcul des ordinateurs des centres de prévision météorologique soient très élevées, les prévisions ne vont, hélas, jamais au-delà de quelques jours.

De telles techniques constituent ce que l'on appelle généralement la *méthode de Monte Carlo*, et aujourd'hui une vaste littérature sur les applications les plus variées est disponible.

À la base de toute simulation, il y a l'utilisation de nombres aléatoires en grande quantité. De plus, pour qu'une simulation soit fiable il faut que les nombres aléatoires utilisés aient toutes les propriétés que l'on attend. Ainsi, il ne suffit pas de disposer d'une liste finie de 100 ou même d'un million de nombres aléatoires et de l'utiliser en boucle pour des simulations. En bref, la production de nombres aléatoires en grandes quantités n'est pas une simple affaire.

L'exigence d'utiliser des nombres aléatoires dans la science s'est manifestée au début du siècle passé. En 1927, une liste de 41 600 nombres aléatoires pour usage scientifique, produite par Leonard Tippett, a été publiée par Cambridge University Press. Ensuite, La fondation RAND, en 1955, publia *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*, sur la base d'une simulation par ordinateur avec un algorithme qui aujourd'hui est considéré comme dépassé. Déjà à l'époque, certains soulevaient de sérieux doutes sur la possibilité de produire des nombres vraiment aléatoires de façon automatique. Neumann, en 1951, remarquait justement que par leur propre nature il ne peut pas exister une méthode algébrique capable de produire des nombres aléatoires. Cela montre bien que la production automatique de nombres aléatoires a été un sujet controversé. Des suites décimales de nombres normaux spéciaux comme  $\pi$  comme suite aléatoire de chiffres décimaux ont aussi été proposées (Dodge, 1996). En effet, Borel en 1909 démontra qu'un nombre réel pris au hasard sur l'intervalle  $[0, 1]$  est normal avec probabilité 1, c'est-à-dire que toutes les différentes séquences finies de chiffres (sous une base fixée) apparaissent selon une distribution de fréquences uniforme, en faisant d'un nombre normal un bon candidat pour fournir ainsi une suite de nombres aléatoires.

L'histoire de la génération des nombres aléatoires commence avec des machines plus ou moins complexes dont le but était de piocher des boules numérotées d'une urne. Encore aujourd'hui, en dépit d'algorithmes performants et de qualité élevée pour la génération de nombres aléatoires en grandes quantités, de telles machines sont utilisées pour les loteries à numéros et les ordinateurs ne les remplaceront-ils probablement jamais. Il y a une raison philosophique à cela, celle qui est au fond soulevée par Neumann : un algorithme implémenté produira une suite de nombres dont la nature est déterministe, et donc d'une certaine manière prévisible, et la suite aura seulement l'apparence d'être aléatoire.

### 1.3 Systèmes, modèles et méthodes de résolution

Un *système* est un ensemble d'éléments que l'on peut appeler *composantes*. Chacun de ces éléments possède plusieurs caractéristiques ou attributs qui peuvent prendre des valeurs numériques ou logiques. Par exemple, une installation industrielle peut être considérée comme un système, dont les composantes sont les machines et les ouvriers ; le fait qu'une machine fonctionne ou non est une caractéristique de ce système. Une économie nationale, composée de

ses consommateurs et de ses producteurs, est également un système ; l'un des attributs d'un consommateur peut être l'importance de sa demande pour un produit particulier.

Les composantes d'un système sont interactives. Par exemple, sans opérateur, la machine ne peut pas fonctionner. À côté de ces relations, appelées internes, figurent des relations dites externes. Ces dernières relient les éléments du système avec l'environnement, c'est-à-dire le monde en dehors du système.

Un *modèle* peut être défini comme une architecture mathématique qui représente un certain système. Il existe plusieurs types de modèles.

Un modèle est constitué de symboles mathématiques représentant des systèmes réels. Autrement dit, le modèle mathématique d'un système est l'ensemble des relations mathématiques caractérisant les états possibles du système.

Les problèmes de simulation peuvent être classés en deux grandes catégories : les problèmes *déterministes* et les problèmes *probabilistes*. Les problèmes déterministes sont ceux pour lesquels l'incertitude est soit négligeable, soit entièrement absente et qui comprennent des phénomènes physiques simples comme la chute libre d'un objet ou un mouvement uniforme. Les problèmes probabilistes comprennent, par exemple, le calcul du nombre optimal de distributeurs de billets, du nombre optimal de guichets et, en général, tout autre phénomène dont le déroulement dépend d'une part de hasard. Dans la réalité, des problèmes complètement déterministes sont assez rares. La plupart du temps, des petites erreurs ou incertitudes sont négligées ou délibérément ignorées : les coûts manufacturiers sont habituellement estimés plutôt que connus ; les instruments de mesure, qui ont une précision de 99,5 %, sont considérés comme parfaits, etc. Dans de telles circonstances, l'emploi d'un modèle déterministe se justifie seulement si l'on s'attend à ce que les écarts dans la pratique soient à la fois rares et petits.

Les problèmes de simulation probabilistes ou stochastiques comprennent eux un degré d'incertitude trop important pour être ignoré. Par exemple, sous certaines hypothèses au sujet de l'arrivée aléatoire de passagers à un distributeur de billets, le nombre de personnes faisant la queue peut être en moyenne de 5, mais il peut monter jusqu'à 50, une ou deux fois par jour. Il serait vraiment erroné, dans ce cas, de calculer le nombre optimal de distributeurs de billets sur la base d'un modèle déterministe qui utilise seulement la moyenne de 5 et néglige les cas occasionnels. Pour représenter une incertitude de cette sorte, des modèles d'optimisation stochastiques utilisent des variables aléatoires dont les valeurs sont données par des distributions de probabilité plutôt que par de simples nombres ou équations. Les problèmes stochastiques sont généralement beaucoup plus complexes et plus difficiles à résoudre que les problèmes déterministes.

En économie, on classe habituellement les variables d'un modèle en *variables exogènes* et *variables endogènes*. Les valeurs des variables exogènes ne sont pas déterminées par le modèle. On les appelle aussi variables indépendantes. Dans la terminologie des systèmes, les variables indépendantes peuvent encore

être divisées en variables incontrôlables et variables contrôlables. Les variables incontrôlables, par exemple la demande étrangère, sont les inputs du système. Les variables contrôlables, par exemple les dépenses du gouvernement, sont des variables manipulées par certaines composantes du système.

Les valeurs des variables endogènes dépendent du modèle. Dans la terminologie des systèmes, on peut classer ces variables dépendantes en *variables d'état* ou *intermédiaires* décrivant l'état du système, et en *variables de sortie*.

À côté des variables, nous distinguons, dans le modèle, des *paramètres*. Les paramètres sont des quantités qui influencent les variables endogènes. Cependant, contrairement aux variables, ils sont constants. Par exemple un paramètre peut être lié au critère selon lequel un gestionnaire de stock cadence les nouvelles commandes. Les *relations* indiquent comment les variables et les paramètres sont reliés entre eux.

Pour répondre aux questions relatives à un phénomène étudié, il faut souvent résoudre les équations du modèle. Il existe des méthodes de résolution *analytiques* et des méthodes de résolution *numériques*.

La méthode analytique fait appel au calcul différentiel et intégral. Elle fournit une solution générale sous la forme d'une équation ou d'une formule valable pour différentes valeurs possibles des variables indépendantes et des paramètres. Toutefois, le champ des problèmes qui peuvent être résolus mathématiquement est limité. En effet, les problèmes que l'on rencontre dans la pratique nécessitent que le modèle utilisé soit exprimé sous une forme particulière d'un système d'équations algébriques ou différentielles pouvant être très complexes suivant la nature du phénomène ou du système à étudier. Or, le degré de complexité de ce phénomène peut exiger de l'analyste une simplification parfois abusive du modèle, dans le but de s'adapter aux techniques mathématiques disponibles.

La résolution numérique remplace les variables indépendantes et les paramètres du modèle par des nombres qu'elle manipule. Beaucoup de techniques numériques sont itératives, c'est-à-dire que chaque étape de la résolution donne une meilleure solution que la précédente en utilisant les résultats des étapes antérieures. La *programmation mathématique* est une technique numérique de ce genre.

La *simulation* et la *méthode de Monte Carlo* sont des techniques numériques spécifiques. La méthode de Monte Carlo est une technique de résolution d'un problème qui utilise des échantillons de nombres aléatoires dans le modèle qui le décrit. Nous reviendrons sur cette méthode dans le Chapitre 6. Quant à la simulation, elle représente une expérience dans le temps faite sur un modèle abstrait et impliquant la présence de variables aléatoires. Dans la plupart des cas, les études de simulation utilisent des nombres aléatoires.

Dans le contexte décrit ci-dessus, la simulation est une expérience qui suppose la construction d'un modèle de travail mathématique présentant une similitude de propriétés ou de relations avec le système naturel faisant l'objet de l'étude. De cette façon, nous pouvons prévoir les caractéristiques de fonctionnement de ce système sans avoir à travailler avec des dispositifs physiques. Il s'agit d'effectuer, à l'aide du modèle désigné, des *expériences artificielles* per-

mettant de restituer des valeurs pour certaines variables qui soient conformes aux lois de probabilité observées dans un cas réel. Ces valeurs constituent un *échantillon artificiel*.

Prenons l'exemple de la simulation d'un phénomène de file d'attente aux caisses d'un grand magasin. Supposons que le but de l'étude soit de connaître le meilleur « système de caisse », c'est-à-dire celui pour lequel la somme des coûts d'inactivité des caisses et des coûts d'attente des clients soit la plus faible. L'évolution du phénomène dépend essentiellement de la loi des arrivées des clients aux caisses et de la loi des temps de service. La connaissance de ces lois permet de décrire cette évolution et de calculer ainsi le coût d'un système. Il suffit alors de répéter l'expérience pour différents systèmes et de choisir le meilleur. La connaissance des lois est en général empirique : elle résulte d'une étude statistique à partir de laquelle on peut déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires caractérisant le phénomène. Le problème fondamental de la simulation sera par conséquent de construire ces échantillons artificiels relatifs à des variables de lois connues statistiquement. Dans notre exemple, il s'agit de simuler un échantillon d'arrivée de clients et un échantillon des temps de service. Cette construction se fait à l'aide de *générateurs de nombres aléatoires*, sujet faisant l'objet du Chapitre 3.

L'inconvénient de la simulation par rapport à une solution analytique est qu'elle ne fournit que des solutions spécifiques à un problème donné, et non pas des solutions générales. Dans un but pratique, il convient, avant d'en venir aux techniques de simulation, de considérer l'ensemble des techniques mathématiques disponibles pour résoudre le problème. Dans ce sens, l'emploi de la simulation peut se révéler utile et justifié s'il propose une extension ou un complément aux solutions analytiques obtenues au prix d'une trop grande simplification.

Nous allons voir maintenant trois exemples de problèmes qui peuvent être résolus par la simulation.

## 1.4 Un phénomène de file d'attente

Faire la queue ! Voilà une chose dont quiconque a malheureusement déjà fait l'expérience. Pour acheter un timbre à la poste, pour se faire enregistrer à l'aéroport, il faut attendre son tour.

De manière générale, nous pouvons définir un phénomène de file d'attente par les faits suivants : chaque fois qu'un certain nombre d'unités que nous appellerons *clients* se présente de manière aléatoire, afin de recevoir un *service* d'une *durée aléatoire* de la part d'autres unités que nous appellerons *stations*, on est en présence d'une file d'attente.

Considérons l'exemple d'une file d'attente aux caisses d'un grand magasin. Le client pourra alors se poser plusieurs questions :

- (a) combien de temps va-t-il attendre en moyenne dans la queue ?
- (b) quelle probabilité a-t-il d'attendre plus d'un temps  $t$  ?

(c) combien de clients va-t-il trouver devant lui ?

Si nous essayions de répondre aux questions ci-dessus de manière analytique, il nous serait impossible de tenir compte du fait que les clients arrivent de façon aléatoire au magasin. Nous serions obligés de considérer que les clients arrivent de manière régulière, ou au moins à des moments connus, et que les temps de service soient eux aussi connus.

Or il est certain qu'il y a beaucoup plus de clients aux heures de pointe qu'aux heures creuses de la journée. Les moments exacts où les clients arrivent et les temps de service sont tout sauf connus à l'avance. La prise en compte des différents aléas n'entre guère dans un modèle déterministe.

Pour pouvoir résoudre un tel problème, nous avons besoin de différentes notions de statistique et de probabilités que nous verrons au Chapitre 2. Un exemple complet de file d'attente sera traité au Chapitre 6.

## 1.5 Un problème de gestion

Dans l'exemple qui suit, on veut simuler l'état, minute par minute, du nombre d'avions supplémentaires (ou d'avions en moins) au sol à l'aéroport de Genève-Cointrin entre 17 h 00 et 17 h 18 par rapport à leur nombre à 17 h 00. Pour cela, il faut connaître les lois de probabilités du nombre d'arrivées et du nombre de départs par minute. Cela pour estimer toute une série de variables utiles à la gestion d'un aéroport comme le nombre maximal d'avions présents au sol. Supposons que les registres de l'aéroport permettent d'affirmer que ces deux lois sont identiques. Elles sont présentées ci-dessous :

Nombre d'arrivées (départs)	0	1	2	3	4	5
Probabilité du nombre d'arrivées (départs)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{1}{1\ 000}$

**Tab. 1.1.** *Distribution des probabilités du nombre d'arrivées, égale à celle pour les départs.*

À partir de ces lois, nous allons simuler les mouvements d'avions minute par minute.

Si l'on ne possède pas de générateurs de nombres issus des lois de probabilités des arrivées et des départs, on peut utiliser une table de nombres aléatoires comme celle de la Table 1.2.