Maîtriser l'aléatoire

Springer
Paris
Berlin
Heidelberg
New York
Hong Kong
Londres
Milan
Tokyo

Eva Cantoni
Philippe Huber
Elvezio Ronchetti

Maîtriser l'aléatoire

Exercices résolus de probabilités et statistique

Springer

Eva Cantoni
Département d'économétrie
Université de Genève
40, boulevard du Pont d'Arve
1211 Genève 4
Suisse

Philippe Huber
Département d'économétrie
Université de Genève
40, boulevard du Pont d'Arve
1211 Genève 4
Suisse

Elvezio Ronchetti
Département d'économétrie
Université de Genève
40, boulevard du Pont d'Arve
1211 Genève 4
Suisse

ISBN-10 : 2-287-34069-6 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

ISBN-13 : 978-2287-34069-7 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag France, Paris, 2006
Imprimé en France

Springer-Verlag France est membre du groupe Springer Science + Business Media

Cet ouvrage est soumis au copyright. Tous droits réservés, notamment la reproduction et la représentation la traduction, la réimpression, l'exposé, la reproduction des illustrations et des tableaux, la transmission par voie d'enregistrement sonore ou visuel, la reproduction par microfilm ou tout autre moyen ainsi que la conservation des banques de données. La loi française sur le copyright du 9 septembre 1965 dans la version en vigueur n'autorise une reproduction intégrale ou partielle que dans certains cas, et en principe moyennant le paiement de droits. Toute représentation, reproduction, contrefaçon ou conservation dans une banque de données par quelque procédé que ce soit est sanctionnée par la loi pénale sur le copyright.
L'utilisation dans cet ouvrage de désignations, dénominations commerciales, marques de fabrique, etc. même sans spécification ne signifie pas que ces termes soient libres de la législation sur les marques de fabrique et la protection des marques et qu'ils puissent être utilisés par chacun.
La maison d'édition décline toute responsabilité quant à l'exactitude des indications de dosage et des modes d'emploi. Dans chaque cas, il incombe à l'usager de vérifier les informations données par comparaison à la littérature existante.

SPIN : 11752523

Maquette de couverture : Jean-François Montmarché

Collection
Statistiques et probabilités appliquées
dirigée par Yadolah Dodge

Professeur Honoraire
Université de Neuchâtel
2002 Neuchâtel - Suisse

Comité éditorial :

Christian Genest
Département de Mathématiques
et de statistique
Université de Laval
Québec GIK 7P4
Canada

Marc Hallin
Université libre de Bruxelles
Campus de la Plaine CP 210
1050 Bruxelles
Belgique

Ludovic Lebart
École Nationale Supérieure
des Télécommunications
46, rue Barrault
75634 Paris Cedex 13
France

Stephan Morgenthaler
École Polytechnique Fédérale
de Lausanne
Département des Mathématiques
1015 Lausanne
Suisse

Gilbert Saporta
Conservatoire national
des arts et métiers
292, rue Saint-Martin
75141 Paris Cedex 3
France

Dans la même collection :

— *Statistique. La théorie et ses applications,*
Michel Lejeune, avril 2004
— *Le choix Bayésien. Principes et pratique,*
Christian P. Robert, novembre 2005

Préface

Cet ouvrage est le résultat de l'expérience pédagogique des dix dernières années à l'Université de Genève dans le cadre de deux cours de base semestriels de probabilités et statistique au niveau *bachelor*. Dans ces cours sont présentés les concepts de base des probabilités ainsi que de l'inférence statistique. Ces domaines ne sont pas des « sports pour des spectateurs » mais exigent un apprentissage actif des concepts présentés en classe. D'où la nécessité d'une grande quantité d'exercices qui permettent d'assimiler et maîtriser ces concepts.

Dans cet ouvrage, on a recueilli 212 problèmes résolus, structuré en huit chapitres pour des raisons de clarté. À l'intérieur de chaque chapitre, les exercices sont séparés par thème, avec, pour chaque thème, un niveau de difficulté qui va en augmentant. À la fin de chaque chapitre, sont indiquées quelques références qui couvrent les aspects théoriques (non traités ici).

Cet ouvrage peut être utilisé comme complément de tout livre de probabilités et statistique dans le cadre de cours de base dans des domaines aussi variés que les sciences économiques, la psychologie, les sciences sociales, les mathématiques, les sciences naturelles et la médecine. Il peut aussi être utilisé dans le cadre de cours de préparation à l'entrée dans un programme de *master* dans un domaine où ces connaissances sont exigées, ainsi que pour l'autoformation et la préparation d'examens.

Plusieurs personnes nous ont aidés et inspirés au cours de ce projet. Nous tenons à remercier les assistants qui ont collaboré au cours, F.X. de Rossi, V. Czellàr, D. Conne, S. Lô. Le choix de certains exercices a été largement influencé par les travaux pratiques de la Chaire de Statistique Appliquée de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) et aussi par l'excellent livre de S.M. Ross (1987) ; que toutes ces personnes trouvent ici l'expression de notre gratitude.

Pour terminer, nous tenons également à remercier Mme N. Huilleret, éditrice aux éditions Springer-Verlag France, et notre collègue le Professeur Y. Dodge, responsable de la Collection statistique et probabilités appliquées, pour leurs précieux conseils et leurs encouragements.

Genève, juin 2006

Eva Cantoni
Philippe Huber
Elvezio Ronchetti

Web: `http://www.unige.ch/ses/metri/cantoni/Maitriser/index.html`

Sommaire

Chapitre 1

Probabilités élémentaires

Introduction

Les exercices de ce chapitre concernent les règles de base du calcul des probabilités. Dans beaucoup de problèmes élémentaires on calcule la probabilité d'un événement comme {nombre de cas favorables à l'événement}/{nombre de cas possibles}. Cela implique la connaissance de quelques formules de base de l'analyse combinatoire. Un autre outil utile est la construction d'une structure à arbre qui représente graphiquement toutes les séquences possibles d'une expérience répétée. Dans ce contexte, la notion de probabilité conditionnelle permet de calculer des probabilités complexes à partir de situations plus simples. Enfin, le théorème de Bayes est un résultat fondamental qui permet d'« inverser » une probabilité conditionnelle (voir en particulier l'exercice 1.19 et la suite l'exercice 2.1).

Notes historiques

La notion d'aléatoire et le concept intuitif de probabilité remontent à l'antiquité mais c'est au XVI^e^ et au XVII^e^ siècle que des règles élémentaires de calcul sont développées. La fameuse correspondance entre les mathématiciens français Pascal et Fermat en 1654, concernant un problème du jeu au hasard proposé par un noble de l'époque, le Chevalier de Mérée (voir l'exercice 1.6), est considérée comme le point de départ du « calcul » des probabilités. Parmi les grands savants qui ont travaillé par la suite sur des problèmes de probabilités on peut mentionner Jacob Bernoulli avec son oeuvre *Ars Conjectandi* (1713) ainsi que d'autres membres de cette famille unique de mathématiciens suisses, de Moivre avec son oeuvre *Doctrine des chances* (1718) et ensuite Laplace, Euler, Gauss, Lagrange et Legendre. Jusqu'au début du XX^e^ siècle le domaine des probabilités resta un champ des mathématiques constitué d'un ensemble de résultats (intéressants et utiles) mais sans aucune base axiomatique. En 1900 Hilbert énonça son fameux programme qui contenait comme sixième problème le développement d'une structure axiomatique pour les probabilités. En 1933 le mathématicien russe A.N. Kolmogorov releva le défi en publiant un article qui présentait les fameux axiomes à la base du calcul des probabilités. Les probabilités devenaient alors un domaine des mathématiques à part entière comme la géométrie, l'algèbre ou encore l'analyse.

Références (théorie)

Il existe beaucoup de livres sur les probabilités. Deux bonnes références sont Ross, chapitres 1 à 3 [1] et Pitman, chapitre 1 [2].

Exercices

Calculs simples de probabilités

1.1

Quatre hommes déposent leur chapeau au vestiaire en entrant dans un restaurant et choisissent au hasard en sortant 1 des 4 chapeaux. Calculer les probabilités suivantes.

1. Aucun des 4 hommes ne prend son propre chapeau.
2. Exactement 2 des 4 hommes prennent leur propre chapeau.

1.2

Aurélie et Nicolas jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme est 7 ou le produit 6, Aurélie marque un point ; quand la somme est 6 ou le produit 4, Nicolas en marque 1. Pour qui parieriez-vous ?

1.3

Parmi les familles de 2 enfants, la moitié se trouve être bien répartie, c'est-à-dire composée d'autant de garçons que de filles. En est-il de même parmi les familles de 4 enfants ? (On suppose ici que chaque naissance donne avec équiprobabilité un garçon ou une fille.)

1.4

On tire au hasard 2 cartes d'un jeu de cartes de poker (52 cartes). Quelle est la probabilité qu'elles forment un *black jack*, ou autrement dit, que l'une soit un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi ?

1.5

On classe 5 hommes et 5 femmes selon leur résultats lors d'un examen. On fait l'hypothèse que tous les scores sont différents et que les 10! classements possibles ont tous la même probabilité de se réaliser. On désigne le rang de la meilleure femme par X (par exemple X vaudra 2 si le meilleur résultat a été obtenu par un homme et le suivant par une femme). Donner la fonction de fréquences de X, c'est-à-dire $P(X = i)$ pour $i = 1, \ldots, 10$.

1.6

Problème posé par le Chevalier de Mérée à Pascal en 1654.
Quel est l'événement le plus probable : obtenir au moins 1 fois 1 as en lançant 4 fois un dé ou obtenir au moins 1 fois 1 double as en lançant 24 fois 2 dés ?

1.7

On considère 3 événements A, B, et C.

1. À l'aide d'un dessin des ensembles A, B et C, trouver une formule permettant de calculer $P(A \cup B \cup C)$ si l'on connaît les probabilités de chacun de ces événements et les probabilités des intersections de ces événements.
2. Démontrer cette formule à partir des axiomes de la théorie des probabilités.

1.8

On considère une famille avec 2 enfants. On suppose que la venue d'une fille est aussi certaine que celle d'un garçon.

1. Quelle est la probabilité que les 2 enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?
2. Quelle est la probabilité que les 2 enfants soient des garçons sachant qu'au moins un des enfants est un garçon ?

1.9

On jette 2 dés équilibrés.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que les 2 résultats sont différents ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que leur somme vaut i ? Calculer le résultat pour toutes les valeurs possibles de i.

Probabilités totales et théorème de Bayes

1.10

Un certain système a 5 composantes. Une panne du système est causée 35 %, 30 %, 20 %, 10 % et 5 % des fois par une panne dans les composantes

A, B, C, D et E, respectivement. On suppose que les pannes simultanées dans plus d'une composante à la fois sont si rares qu'on peut les négliger.

1. Si une panne du système n'est pas causée par A, quelle est la probabilité qu'elle soit causée par B ?
2. Si une panne du système n'est causée ni par A, ni par B, quelle est la probabilité qu'elle soit causée par C ou D ?

1.11

On compte respectivement 50, 75, et 100 employés dans 3 entrepôts A, B et C, les proportions des femmes étant respectivement égales à 50 %, 60 % et 70 %. Une démission a autant de chance de se produire chez tous les employés, indépendamment de leur sexe. Une employée donne sa démission. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entrepôt C ?

1.12

Tous les meilleurs joueurs du monde sont inscrits au tournoi de tennis de Diamond City pour lequel le 1er prix est une rivière en diamants. On estime *a priori* que Roger Federer a 4 chances sur 10 de gagner, Andy Roddick 3 chances sur 10 et Leyton Hewitt 2 sur 10. Si par hasard Roger Federer se blesse et annule sa participation au dernier moment, que deviennent les chances respectives de Andy Roddick et Leyton Hewitt de remporter la rivière de diamants ?

1.13

Dans un pays où il naît autant de filles que de garçons, le docteur Gluck prévoit le sexe des enfants à naître. Il se trompe 1 fois sur 10 si c'est un garçon et 1 fois sur 20 si c'est une fille. Aujourd'hui il vient de dire à Mme Parisod qu'elle aurait une fille. Quelle est la probabilité pour que cela soit vrai ?

1.14

Une compagnie d'assurance répartit les assurés en 3 classes : personnes à bas risque, risque moyen et haut risque. Ses statistiques indiquent que la probabilité qu'une personne soit impliquée dans un accident sur une période d'un an est respectivement de 0,05, 0,15 et 0,30. On estime que 20 % de la population est à bas risque, 50 % à risque moyen et 30 % à haut risque.

1. Quelle est la proportion d'assurés qui ont eu un accident ou plus au cours d'une année donnée ?

2. Si un certain assuré n'a pas eu d'accidents l'année passée, quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à bas risque ?

1.15

Un avion est porté disparu. On pense que l'accident a pu arriver aussi bien dans n'importe laquelle de 3 régions données. Notons par $1 - \alpha_i$ la probabilité qu'on découvre l'avion dans la région i s'il y est effectivement. Les valeurs α_i représentent donc la probabilité de manquer l'avion lors des recherches. On peut l'attribuer à diverses causes d'ordre géographique ou à la végétation propre à la région.

Quelle est la probabilité que l'avion se trouve dans la i^{e} région $(i = 1, 2, 3)$ si les recherches dans la région 1 n'ont rien donné ?

1.16

À Londres il pleut en moyenne 1 jour sur 2 et donc la météo prévoit de la pluie la moitié des jours. Les prévisions sont correctes 2 fois sur 3, c'est-à-dire les probabilités qu'il pleuve quand on a prévu de la pluie et qu'il ne pleuve pas quand on a prévu du temps sec sont égales à 2/3. Quand la météo prévoit de la pluie, Mr. Pickwick prend toujours son parapluie. Quand la météo prévoit du temps sec il le prend avec probabilité 1/3. Calculer :

1. la probabilité que Mr. Pickwick prenne son parapluie un jour quelconque ;
2. la probabilité qu'il n'ait pas pris son parapluie un jour pluvieux ;
3. la probabilité qu'il ne pleuve pas sachant qu'il porte son parapluie.

1.17

Le sultan dit à Ali Baba : « Voici 2 urnes, 4 boules blanches (b) et 4 boules noires (n). Répartis les boules dans les urnes, mais je rendrai ensuite les urnes indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche. »

1. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 4 boules blanches dans la 1re urne et les 4 noires dans la 2e ?
2. Idem avec 2b+2n dans la 1re urne et 2b+2n dans la 2e.
3. Idem avec 3b dans la 1re urne et 1b+4n dans la 2e.
4. Comment Ali Baba maximise-t-il ses chances ?

1.18

Les assistants sociaux travaillant pour une clinique psychiatrique sont si occupés qu'en moyenne seuls 60 % des patients prospectifs téléphonant pour la 1re fois obtiendront une communication avec l'un de ces assistants. On demande aux autres de laisser leur numéro de téléphone. Trois fois sur 4 un assistant trouve le temps de rappeler le jour même, autrement le rappel a lieu le lendemain. L'expérience a montré que, dans cette clinique, la probabilité que le patient prospectif demande une consultation est de 0,8 s'il a pu parler immédiatement à un assistant, tandis qu'elle tombe à 0,6 et 0,4 respectivement s'il y a eu rappel du patient le jour même ou le lendemain.

1. Quel pourcentage des patients qui appellent demande une consultation ?
2. Quel pourcentage des patients en consultation n'a pas eu à attendre qu'on les rappelle ?

1.19

On a à disposition 2 tests sanguins pour le dépistage du HIV : d'une part l'ELISA, relativement bon marché (environ 20 €) et raisonnablement fiable, et d'autre part le Western Blot (WB), nettement meilleur mais beaucoup plus cher (environ 100 €).

Un patient vient vers vous, un médecin, avec des symptômes vous suggérant qu'il peut être HIV-positif. Pour ce patient, le prévalence du HIV est estimée par la littérature médicale à $P(A) = P(\text{il est HIV-positif}) = 0{,}01$. Les données concernant des personnes dont on connaît le statut HIV apportent :
$P(\text{ELISA positif} \mid \text{HIV-positif}) = 0{,}95$;
$P(\text{ELISA négatif} \mid \text{HIV-négatif}) = 0{,}98$.
En utilisant le théorème de Bayes, calculer :
$P(\text{HIV-positif} \mid \text{ELISA négatif})$ et $P(\text{HIV-négatif} \mid \text{ELISA positif})$.
Quelle(s) conséquence(s) peut-on en tirer sur l'utilisation de l'ELISA ?

1.20

L'hôpital de Jujuy, petite ville du Nord-Ouest de l'Argentine, compte parmi ses malades 4 % qui sont d'origine basque, 58 % d'origine espagnole, 32 % d'origine indienne et 6 % d'origine italienne. Sachant que 3 % des Indiens ont un sang de rhésus négatif, ainsi que 87 % des Basques et 22 % des populations d'origine latine, quelle est la probabilité pour qu'une éprouvette de sang de rhésus négatif provienne d'un malade d'origine basque ?

1.21

Depuis Genève (GVA) où il habite, Serge veut se rendre à Dublin (DUB) pour assister à un concert de U2. S'y étant pris un peu tard, tous les avions pour aller en Irlande sont presque pleins. Trois itinéraires différents et équiprobables s'offrent à lui : passer par Bruxelles (BRU), Munich (MUC) ou Francfort (FRA).

Nadine, qui est hôtesse d'accueil à l'aéroport, a une bonne expérience et fait l'estimation suivante :

- la correspondance partant de BRU a une probabilité de 1/5 d'être pleine ;
- celle partant de MUC, une probabilité de 1/4 ;
- celle partant de FRA, une probabilité de 1/2.

Il existe encore une possibilité supplémentaire. Si Serge décide de passer par FRA (et la liaison FRA-DUB est complète), il aura le temps de prendre un train rapide qui l'amènera à MUC à temps pour prendre le vol MUC-DUB (à condition qu'une place soit disponible dans l'avion, bien entendu).

Cinq jours plus tard, Serge rencontre David et lui témoigne le plaisir qu'il a eu de pouvoir assister au concert de U2. Quelle est la probabilité qu'il soit passé par MUC ?

1.22

Le petit David est très friand de bonbons ; il en a toujours quelques-uns dans les poches. Manquant d'esprit de décision quant à l'arôme qu'il préfère, il procède au jeu suivant. Dans sa poche gauche, il met 5 bonbons à l'orange et 3 à la fraise et, dans la droite, il en met 4 à l'orange et 2 à la fraise. Il tire ensuite une pièce et si elle donne pile, il pioche à gauche et si elle donne face, il se sert à droite. La pièce est bien sûr parfaitement équilibrée.

1. Quelle est la probabilité qu'après 2 jets, il ait mangé 2 bonbons ayant le même parfum ?
2. Il rentre ensuite chez lui et vide ses poches sur une table. Sa mère, au courant du jeu de son fils, trouve sur la table 7 bonbons à l'orange et 5 à la fraise. Aidez-la à trouver la séquence des 2 jets de pièce la plus probable qu'a eue David.
3. Le lendemain, David n'a plus que des bonbons à l'orange. Il en met 5 à gauche et 2 à droite. Il passe chez l'épicier pour en acheter à la fraise. Sachant qu'il les mettra tous dans la poche droite, combien doit-il en acheter pour qu'au prochain jet, il soit le plus près possible d'avoir autant de chances d'en tirer un à l'orange ou à la fraise ?

1.23

Un tribunal de 3 juges déclare un individu coupable lorsque 2 au moins des 3 juges estiment que cette décision est fondée. On admettra que si l'accusé est effectivement coupable, chaque juge se prononcera dans ce sens avec probabilité 0,7, ceci indépendamment des 2 autres. Cette probabilité tombe à 0,2 dans le cas où l'accusé est innocent. 70 % des accusés sont coupables. Calculer la probabilité que le juge 3 vote coupable dans chacune des situations suivantes :

1. les juges 1 et 2 l'ont fait ;
2. le juge 1 a voté coupable ou le juge 2 a voté coupable ;

3. les juges 1 et 2 ont voté tous deux non coupables.

1.24

Freddy fait une sauce au vin que le monde entier vient goûter. Comme elle est très délicate, il la rate 1 fois sur 10 s'il utilise du Bordeaux ou du Bourgogne et 1 fois sur 5 avec du Côtes-du-Rhône. Dans sa cuisine, Freddy a une bouteille ouverte dont il a perdu l'étiquette. Connaissant la proportion de ces 3 vins dans sa cave, il estime que les chances que cette bouteille soit un Bordeaux, un Bourgogne ou un Côtes-du-Rhône sont respectivement 40 %, 30 % et 30 %. Freddy utilise cette bouteille pour faire sa sauce et la rate. Quelles doivent être ses nouvelles estimations sur la provenance de la bouteille ?

Corrigés

1.1

On numérote les chapeaux $1, 2, 3$ et 4. Il y a $4! = 24$ issues possibles $w_1 = (1, 2, 3, 4)$, $w_2 = (1, 2, 4, 3), \ldots$, où $w_1, \ldots, w_{24}$ sont les issues possibles.

1. On compte les issues favorables, à savoir celles qui n'ont ni le 1 en 1re position, ni le 2 en 2e, ni le 3 en 3e, ni le 4 en 4e. On dénombre alors 9 issues favorables. La probabilité est donc de $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.
2. On procède de la même manière en choisissant comme issues favorables celles qui ont exactement 2 chapeaux placés au bon endroit. On en dénombre 6 et la probabilité est de $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

1.2

Avec 2 dés de 6 faces, il y a 36 issues possibles. Aurélie marque 1 point si les dés montrent une des 8 combinaisons suivantes

$$(2{,}3)\ ,\ (6{,}1)\ ,\ (2{,}5)\ ,\ (4{,}3)\ ,\ (3{,}2)\ ,\ (1{,}6)\ ,\ (5{,}2) \text{ ou } (3{,}4).$$

Nicolas marque 1 point si les dés donnent

$$(2{,}2)\ ,\ (4{,}1)\ ,\ (5{,}1)\ ,\ (4{,}2)\ ,\ (3{,}3)\ ,\ (2{,}4)\ ,\ (1{,}5) \text{ ou } (1{,}4),$$

soit 8 issues favorables également. Donc

$$P(\text{Aurélie marque 1 point}) = P(\text{Nicolas marque 1 point}) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

Les probabilités de marquer 1 point sont égales.

1.3

Soient F l'événement « avoir une fille » et G l'événement « avoir un garçon ». Il y a $2^4 = 16$ issues possibles pour une famille de 4 enfants. On dénombre 6 issues « avoir 2 filles et 2 garçons » :

$$(GGFF)\ ,\ (GFGF)\ ,\ (GFFG)\ ,\ (FGGF)\ ,\ (FGFG)\ ,\ (FFGG),$$

et la probabilité cherchée est $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. Il y a donc moins de familles bien réparties avec 4 enfants.

1.4

Le nombre d'issues possibles lorsqu'on tire 2 cartes parmi 52 est C_2^{52}. Le nombre d'issues favorables « (un 10 OU un valet OU une dame OU un roi) ET un as » est $C_1^4 \cdot C_1^{16}$. Ainsi

$$P(blackjack) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{32}{663}.$$

1.5

Soit X le rang de la meilleure femme. La probabilité d'avoir $X = 1$ est

$$P(X = 1) = P(\text{femme en premier}) = P(F \ldots) = \frac{1}{2}.$$

La probabilité d'avoir $X = 2$ correspond à la probabilité qu'un homme soit 1^er^ et une femme 2^e^ :

$$P(X = 2) = P(HF \ldots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}.$$

On continue de la même manière

$$\begin{aligned} P(X=3) &= P(HHF\ldots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{36} \\ P(X=4) &= P(HHHF\ldots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{84} \\ P(X=5) &= P(HHHHF\ldots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{252} \\ P(X=6) &= P(HHHHHF\ldots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{252} \end{aligned}$$

Finalement, la meilleure femme ne pouvant être classée au-delà de la 6^e^ place, $P(X = 7) = P(X = 8) = P(X = 9) = P(X = 10) = 0$.

1.6

Soient les événements A « obtenir au moins 1 as en lançant 4 fois un dé » et B « obtenir au moins une paire d'as en lançant 24 fois 2 dés ». Ainsi

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0{,}518$$

et

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0{,}491.$$

L'événement le plus probable est A.

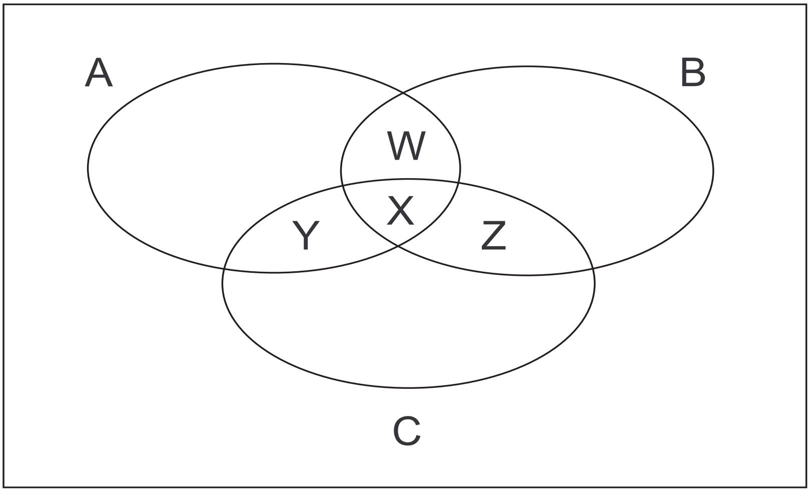

Fig. 1.1 – Diagramme de l'exercice 1.7.

1.7

Soient 3 événements A, B et C.

1. Dans le dessin des ensembles de la figure 1.1, W, X, Y et Z sont des surfaces qui représentent $P(A \cap B)$ par $W + X$, $P(A \cap C)$ par $X + Y$ et $P(B \cap C)$ par $X + Z$.
   Pour le calcul de $P(A \cup B \cup C)$, on commence par additionner les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$. En procédant de la sorte, on a compté une fois de trop les aires $W + X$, $Y + X$ et $Z + X$ qu'il faut donc soustraire. Finalement, la surface X a été additionnée 3 fois, puis soustraite 3 fois également. Pour arriver au résultat final, il faut, par conséquent, l'ajouter encore une fois. Ainsi

$$\begin{aligned}
&P(A \cup B \cup C) = \\
&\quad = \quad P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
&\qquad\quad +P(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

2. Par les axiomes de la théorie des probabilités, on obtient le même résultat

$$\begin{aligned}
&P(A \cup B \cup C) = \\
&\quad = \quad P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\
&\quad = \quad P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&\quad = \quad P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
&\qquad\quad +P(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

1.8

Soient F l'événement « avoir une fille » et G l'événement « avoir un garçon ». Dans une famille avec 2 enfants, il y a 4 issues possibles

$$(GG\ , GF\ , FG\ , FF).$$

1. On cherche
$$P(GG \mid GF \cup GG) = \frac{P(GG)}{P(GF) + P(GG)} = \frac{1/4}{1/4 + 1/4} = \frac{1}{2}.$$

2. Cette fois,
$$P(GG \mid GF \cup FG \cup GG) = \frac{1}{3}.$$

1.9

Soient « $\neq$ » l'événement « les 2 dés donnent des résultats différents » et S la variable aléatoire « somme des 2 dés ».

1.
$$P(6 \mid \neq) = \frac{P(6 \cap \neq)}{P(\neq)} = \frac{10/36}{30/36} = \frac{1}{3}.$$

2.
$$\begin{aligned}
&P(6 \mid S = i) = \frac{P(6 \cap S = i)}{P(S = i)} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\\
&P(6 \mid S = 7) = \frac{1}{3}\\
&P(6 \mid S = 8) = \frac{2}{5}\\
&P(6 \mid S = 9) = \frac{1}{2}\\
&P(6 \mid S = 10) = \frac{2}{3}\\
&P(6 \mid S = 11) = 1\\
&P(6 \mid S = 12) = 1\\
&P(6 \mid S = i) = 0 \quad i > 12.
\end{aligned}$$

1.10

Soit A (respectivement B, C, D et E) l'événement « la panne provient de la composante A (respectivement B, C, D et E) ».

1.
$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

Puisque $B \subset \overline{A}$

$$\frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}35} = \frac{30}{65} \simeq 0{,}46.$$

2. Par le même raisonnement, $(C \cup D) \subset (\overline{A} \cup \overline{B})$. De plus, les pannes ne peuvent pas être simultanées ce qui implique que tous les événements sont indépendants. Ainsi

$$P(C \cup D \mid \overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{P(C \cup D)}{P(C \cup D \cup E)} = \frac{P(C) + P(D)}{P(C) + P(D) + P(E)} = \frac{30}{35} \simeq 0{,}86.$$

1.11

Soit A (respectivement B et C) l'événement « l'employé travaille dans l'entrepôt A » (respectivement B et C) et F l'événement « l'employé est une femme ». On trouve alors

$$\begin{aligned} P(C \mid F) &= \frac{P(F \mid C)P(C)}{P(F \mid A)P(A) + P(F \mid B)P(B) + P(F \mid C)P(C)} \\ &= \frac{0{,}7\frac{100}{225}}{0{,}5\frac{50}{225} + 0{,}6\frac{75}{225} + 0{,}7\frac{100}{225}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.12

Soit F (respectivement R et H) l'événement « R. Federer (respectivement A. Roddick et L. Hewitt) gagne le tournoi ». On cherche $P(R \mid \overline{F})$. De

$$P(R) = P(R \mid F)P(F) + P(R \mid \overline{F})P(\overline{F}),$$

on déduit

$$P(R \mid \overline{F}) = \frac{P(R) - P(R \mid F)P(F)}{P(\overline{F})} = \frac{3/10 - 0 \cdot 4/10}{6/10} = \frac{1}{2}.$$

De la même manière, on trouve

$$P(H \mid \overline{F}) = \frac{1}{3}.$$

1.13

Soient PA l'événement « Mme Parisod a une fille » et GL l'événement « le docteur Gluck a prévu une fille ». On trouve

$$\begin{aligned} P(PA \mid GL) &= \frac{P(GL \mid PA)P(PA)}{P(GL \mid PA)P(PA) + P(GL \mid \overline{PA})P(\overline{PA})} \\ &= \frac{19/20 \cdot 1/2}{19/20 \cdot 1/2 + 1/10 \cdot 1/2} = \frac{19}{21} \simeq 0{,}91. \end{aligned}$$

1.14

Soient A l'événement « avoir 1 accident ou plus » et B_1 (respectivement B_2 et B_3) l'événement « appartenir à la catégorie bas (respectivement moyen et haut) risque ».

1.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3) \\ &= 0{,}05 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}175. \end{aligned}$$

2.

$$P(B_1 \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \mid B_1)P(B_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}2}{0{,}825} \simeq 0{,}23.$$

1.15

Soient E_i l'événement « l'avion est dans la région i » et M_i l'événement « on ne trouve pas l'avion dans la région i », avec $i = 1\,,2\,,3$. On sait que

$$P(E_i) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(M_i \mid E_i) = \alpha_i, \quad i = 1\,,2\,,3.$$

On cherche les probabilités que l'avion se trouve dans une des 3 régions en sachant que les recherches dans la zone 1 n'ont rien donné

$$P(E_1 \mid M_1) = \frac{P(E_1) \cdot P(M_1 \mid E_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(M_1 \mid E_i) \cdot P(E_i)} = \frac{\alpha_1 \cdot 1/3}{\alpha_1 \cdot 1/3 + 1/3 + 1/3} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2}.$$

Dans ce calcul, on a tenu compte du fait qu'il est certain de ne pas trouver l'avion dans la zone 1 si ce dernier se trouve en réalité dans les zones 2 ou 3 ($P(M_1 \mid E_2) = P(M_1 \mid E_3) = 1$). On procède de la même manière pour

$$P(E_2 \mid M_1) = \frac{P(E_2) \cdot P(M_1 \mid E_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(M_1 \mid E_i) \cdot P(E_i)} = \frac{1}{\alpha_1 + 2} = P(E_3 \mid M_1).$$

1.16

Soient les événements W = « la météo prévoit la pluie », R=« il pleut » et U = « Mr. Pickwick prend son parapluie ». On sait que $P(R) = 1/2$. De plus, on peut dessiner l'arbre de la figure 1.2, avec lequel on calcule

1.

$$P(U) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

2.

$$P(\overline{U} \mid R) = \frac{P(\overline{U} \cap R)}{P(R)} = \frac{1/2 \cdot 1/3 \cdot 2/3}{1/2} = \frac{2}{9},$$

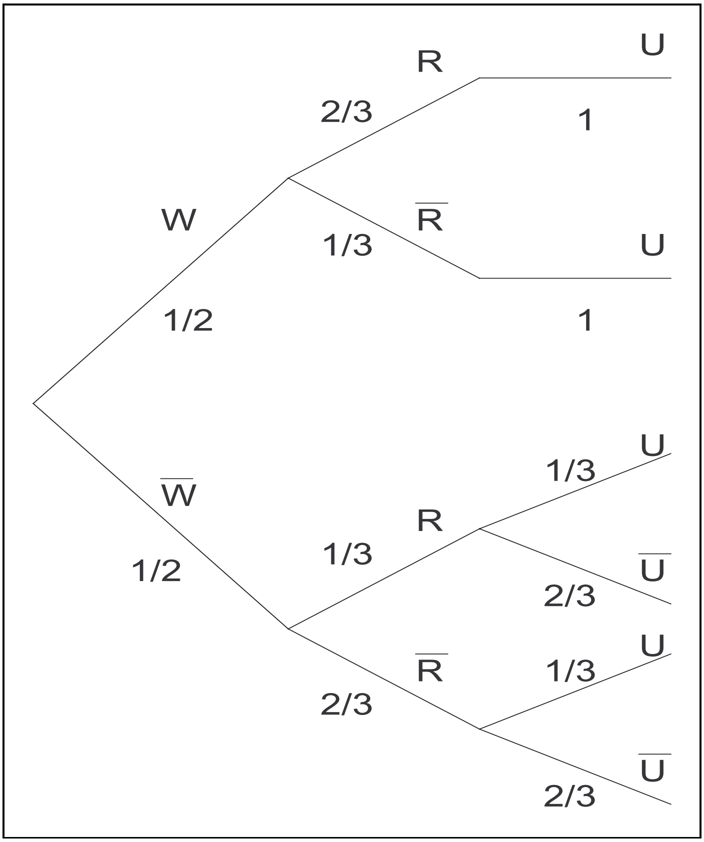

Fig. 1.2 – Arbre de l'exercice 1.16.

3.
$$P(\overline{R} \mid U) = \frac{P(\overline{R} \cap U)}{P(U)} = \frac{1/2 \cdot 2/3 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3 \cdot 1}{2/3} = \frac{5}{12}.$$

1.17

Soient les événements U_1 (U_2) « Ali Baba tire dans la 1re (2e) urne » et S « Ali Baba a la vie sauve ». Dans tous les cas suivants, on aura

$$P(S) = P(S \mid U_1)P(U_1) + P(S \mid U_2)P(U_2).$$

1. Quatre boules blanches sont placées dans U_1 et 4 noires dans U_2

$$P(S) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ ;$$

2. Deux boules blanches et 2 boules noires sont placées dans chacune des 2 urnes
$$P(S) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ ;$$
3. Trois boules blanches sont placées dans U_1 et le reste dans U_2
$$P(S) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\frac{1}{2} = \frac{3}{5}\ ;$$
4. Ali Baba maximise ses chances de rester en vie en plaçant 1 boule blanche dans la 1re urne et toutes les autres dans la 2e
$$P(S) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7}\frac{1}{2} = \frac{5}{7}.$$

1.18

Soient les événements A « le patient demande une consultation » et B_1 (respectivement B_2 et B_3) « le patient obtient immédiatement (respectivement le soir même et le lendemain) un entretien téléphonique ».

1. Le pourcentage des patients demandant une consultation parmi ceux qui appellent est
$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)P(B_i) = \\ &= 0{,}8 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}75 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}7 = 70\ \%. \end{aligned}$$
2. Le pourcentage des patients en consultation qui n'ont pas eu à attendre d'être rappelés est
$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}6}{0{,}7} \simeq 68{,}6\ \%.$$

1.19

Soient les événements HIV^+ (respectivement HIV^-) « le patient est HIV-positif (respectivement négatif) » et E^+ (respectivement E^-) « l'ELISA est positif (respectivement négatif) ». On trouve
$$\begin{aligned} P(HIV^+ \mid E^-) &= \frac{P(E^- \mid HIV^+)P(HIV^+)}{P(E^- \mid HIV^+)P(HIV^+) + P(E^- \mid HIV^-)P(HIV^-)} \\ &= \frac{0{,}05 \cdot 0{,}01}{0{,}05 \cdot 0{,}01 + 0{,}98 \cdot 0{,}99} = 0{,}05\ \% \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} P(HIV^- \mid E^+) &= \frac{P(E^+ \mid HIV^-)P(HIV^-)}{P(E^+ \mid HIV^+)P(HIV^+) + P(E^+ \mid HIV^-)P(HIV^-)} \\ &= \frac{0{,}02 \cdot 0{,}99}{0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}95 \cdot 0{,}01} = 0{,}68. \end{aligned}$$

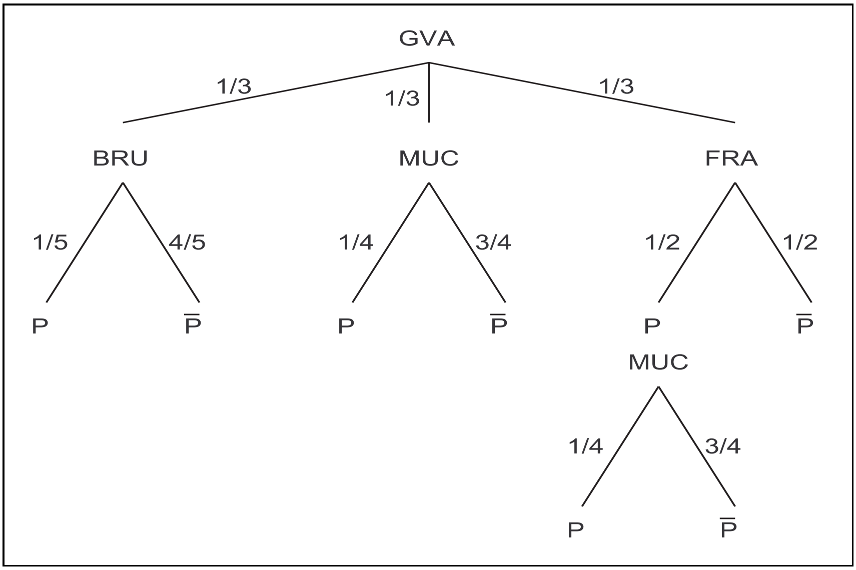

Fig. 1.3 – Arbre de l'exercice 1.21.

Au vu de ces résultats, il est évident que l'ELISA est un très bon test pour déterminer si un patient n'est pas HIV-positif. Par contre, il est inefficace pour décider de la contamination d'un patient. Dans l'exercice 2.1, un autre test est utilisé pour déterminer si un patient est vraiment malade.

1.20

Soient les événements B (respectivement I et L) « le malade est d'origine basque (respectivement indienne et latine) » et RH^+ (respectivement RH^-) « le sang contenu dans une éprouvette est de rhésus positif (respectivement négatif) ». On cherche la probabilité que le sang de rhésus négatif contenu dans une éprouvette provienne d'un malade d'origine basque :

$$\begin{aligned} P(B \mid RH^-) &= \frac{P(RH^- \mid B)P(B)}{P(RH^-)} \\ &= \frac{0{,}97 \cdot 0{,}04}{0{,}87 \cdot 0{,}04 + 0{,}03 \cdot 0{,}32 + 0{,}22 \cdot 0{,}64} \simeq 0{,}19. \end{aligned}$$

1.21

Soient les événements BRU (respectivement MUC et FRA) « Serge passe par Bruxelles (respectivement Munich et Francfort) » et P l'événement « Serge ne peut pas partir car l'avion est plein ». On construit l'arbre de la figure 1.3

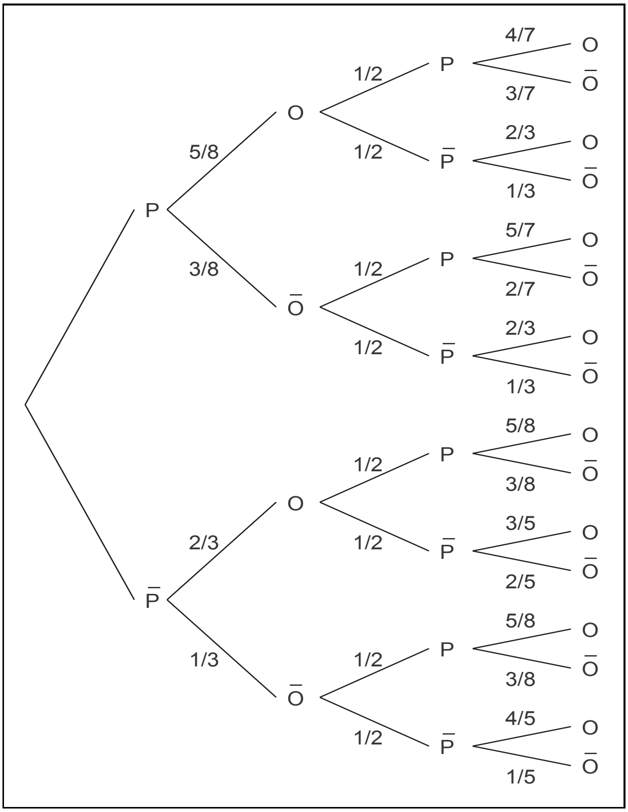

Fig. 1.4 – Arbre de l'exercice 1.22.

pour trouver

$$
\begin{aligned}
P(MUC \mid \overline{P}) &= \frac{P(MUC \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} \\
&= \frac{1/3 \cdot 3/4 + 1/3 \cdot 1/2 \cdot 3/4}{1/3 \cdot 4/5 + 1/3 \cdot 3/4 + 1/3 \cdot 1/2 \cdot 3/4 + 1/3 \cdot 1/2} \\
&= \frac{45}{97} \simeq 0{,}46.
\end{aligned}
$$

1.22

Soient les événements P « la pièce donne pile » et O « le bonbon tiré est à l'orange ». Au départ, David a 5 bonbons à l'orange et 3 à la fraise dans la poche gauche ($5O + 3\overline{O}$) et 4 à l'orange et 2 à la fraise dans la droite ($4O + 2\overline{O}$).

On construit l'arbre de la figure 1.4 en faisant attention au fait que les tirages sont sans remise ; ce qui implique que les probabilités changent au fur