# Mathématiques de base pour économistes

**Springer**

*Paris*
*Berlin*
*Heidelberg*
*New York*
*Barcelone*
*Hong Kong*
*Londres*
*Milan*
*Singapour*
*Tokyo*

Yadolah Dodge

# Mathématiques de base pour économistes

Springer

**Yadolah Dodge**
Professeur honoraire
Université de Neuchâtel
Suisse
yadolah.dodge@unine.ch

ISBN : 978-2-287-74940-7 Springer Paris Berlin Heidelberg New York


Imprimé en France

Springer-Verlag France est membre du groupe BertelsmannSpringer Science + Business Media GmbH



Couverture : Jean-François Montmarché

Dédié à la mémoire de Naser, mon frère.

# Table des matières

# Préface

Ce livre contient des éléments fondamentaux de mathématiques et est destiné aux étudiants de première année en sciences économiques, gestion, finance et sciences sociales. Son contenu est de ce fait conforme aux besoins mathématiques des matières enseignées dans ces branches. Ce livre est également un lien entre les cours élémentaires d'économie, de statistique et de recherche opérationnelle.

Il est essayé dans ce livre d'enseigner les éléments de base des mathématiques avec des exemples, chaque fois que cela est possible. Ce texte est écrit pour ceux qui ont peu de connaissances en mathématiques. Il contient néanmoins les éléments nécessaires et suffisants pour aborder la deuxième année du degré universitaire. De courtes démonstrations sont données tout au long du livre. Toutefois, les références citées à la fin du livre sont suffisantes pour qu'un lecteur intéressé puisse approfondir les sujets traités.

Ce livre est composé de treize chapitres regroupés en trois parties et présentés avec de nombreux exemples. Dans la partie analyse, le chapitre 1 présente quelques éléments essentiels de la théorie des ensembles, des variables et des relations entre les variables. Ces concepts de base sont indispensables pour la suite du cours. Le chapitre 2 considère la représentation graphique des équations algébriques permettant une visualisation des relations entre les variables. Le chapitre 3 aborde le domaine du calcul différentiel. Les notions de suites, limites et première dérivée y sont expliquées. Le chapitre 4 traite des applications des dérivées, c'est-à-dire de ce qu'on peut étudier à l'aide des dérivées. Le chapitre 5 considère l'opération inverse de la dérivée à savoir l'intégration. L'intégration est utile notamment pour calculer l'aire qui se situe sous une courbe. Le chapitre 6 aborde les séries mathématiques. Les fonctions vues jusqu'au chapitre 6 sont toutes des fonctions d'une seule variable. Le chapitre 7 donne quelques éléments concernant les fonctions de deux ou plusieurs variables et leurs applications, notamment dans le domaine économique. Le chapitre 8 introduit la partie d'algèbre linéaire et fournit les éléments de base du calcul matriciel en présentant différents types de matrices et quelques opérations usuelles sur celles-ci. Une application du calcul matriciel est la résolution de systèmes d'équations linéaires et fait l'objet du chapitre 9. Le chapitre 10 traite des vecteurs et espaces vectoriels alors que le chapitre 11 aborde le calcul différentiel sous forme matricielle (matrice hessienne). La 3ᵉ partie est constituée d'un chapitre sur un logiciel mathématique puissant : *Mathematica*® qui permet de résoudre tous les problèmes exposés dans ce livre. Finalement, une page historique est présentée dans le chapitre 13.

Je tiens à remercier vivement Sylvie Gonano pour son étroite collaboration à la rédaction du manuscrit qui est à l'origine de la première édition (1987). Depuis, ce livre a été édité par "*Presses Académiques Neuchâtel*" en 1989 et en 1996. Ce manuscrit a servi de support au cours de mathématiques dispensé aux étudiants en sciences économiques et sociales de l'Université de Neuchâtel. Le livre actuel résulte de modifications et d'ajouts appportés au manuscrit original. Pour ce travail essentiel, j'exprime ma gratitude à mes collaborateurs : Arash Dodge, Gérard Geiser, François Lefebvre, Tatiana Mantuano, Alexandra Fragnière, et particulièrement à Gérard Antille qui a accompli un très grand travail de correction et de vérification du texte et des commentaires. Enfin, les parties historiques du chapitre 13 sont le fruit de discussions avec Farhad Mehran.

Yadolah Dodge
Université de Neuchâtel
30 Mars 2002

# Partie I

# Analyse

# Chapitre 1

# Prologue

| | |
|---|---|
| Moi : | *De quel côté est le chemin ?* |
| Le Sage : | *De quelque côté que tu ailles, si tu es un vrai pèlerin, tu accompliras le voyage.* |
| SOHRAVARDI : | *(1155-1191) Philosophe persan.* |

## 1.1 Introduction

L'objectif de cet ouvrage est d'aider le lecteur à comprendre, apprécier et appliquer l'analyse mathématique. Les mathématiques permettent à l'économiste d'être précis dans la définition des variables, de poser clairement les hypothèses, d'être logique dans le développement de l'analyse et de prendre en considération un nombre plus important de variables.

Dans ce chapitre, nous allons revoir quelques notions fondamentales de la théorie des ensembles, des variables et des relations entre ces variables. Ces concepts de base, bien qu'évidents, sont très importants. Nous insisterons notamment sur les fonctions, outils fondamentaux nécessaires à la théorie économique.

## 1.2 Les ensembles

Georg Ferdinand Cantor, né en 1845 à Saint-Petersbourg en Russie, fonda la théorie des ensembles et introduisit le concept des nombres infinis avec sa découverte des nombres cardinaux. Il développa aussi l'étude concernant les séries trigonométriques et fut le premier à prouver que les nombres réels sont indénombrables.

Un **ensemble** est une collection d'objets bien déterminés. On appelle ces objets les **éléments** de l'ensemble.

Un ensemble est défini soit par une liste de ses éléments, soit par une règle qui définit les éléments de l'ensemble. On utilisera les majuscules pour représenter un ensemble, et il est d'usage de noter les éléments à l'intérieur d'accolades.

**Exemple 1.1** *$A = \{1, 2, 3\}$ signifie que l'ensemble $A$ contient les éléments 1,2 et 3. $B = \{x : x$ est un nombre impair$\}$ signifie que l'ensemble $B$ contient tous les nombres entiers impairs, à savoir $\pm 1$, $\pm 3$, $\pm 5$, $\pm 7$, etc.*

L'appartenance à un ensemble se note par le signe $\in$, la non-appartenance se note par $\notin$. Un ensemble ne contenant aucun élément se note par $\emptyset$ et se lit **ensemble vide**, par exemple, $S = \{\ x$: $x$ est un nombre impair se terminant par 4 $\} = \emptyset$. Si chaque élément de A se trouve aussi dans $B$, $A$ est un **sous-ensemble** de $B$; on note $A \subseteq B$. S'il existe dans $B$ au moins un élément qui n'appartient pas à $A$, on dit que $A$ est **sous-ensemble propre** de $B$ et on le note $A \subset B$. La notation $A \nsubseteq B$ signifie que $A$ n'est pas un sous-ensemble de $B$. Par définition, deux ensembles sont égaux si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Sauf mention contraire, tous les ensembles considérés sont des sous-ensembles d'un certain ensemble qu'on appelle **ensemble universel** et qui sera noté par $\Omega$.

**Exemple 1.2** *Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A$ est un sous-ensemble propre de $B$: $A \subset B$.*
*Si $A = \{x : x$ est un multiple de $3\}$ et $B = \{x$: $x$ est un multiple de $6\}$, alors $B$ est un sous-ensemble propre de $A$: $B \subset A$.*
*Si $A = \{0.1, 0.4, 0.6, 0.8\}$ et $B = \{x : x$ est un nombre entier$\}$, $A$ n'est pas un sous-ensemble de $B$: $A \nsubseteq B$.*

Par la suite, les ensembles numériques fondamentaux seront notés par :

$\mathbb{N}$ = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z}$ = $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{Q}$ = $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} n \neq 0\}$, l'ensemble des nombres rationnels.

$\mathbb{R}$ pour l'ensemble des nombres réels.

Notons que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

**Exemple 1.3** *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont très souvent utilisés en mathématique. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$; ces intervalles sont notés ainsi :*

$$
\begin{aligned}
]a; b[ &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} : \text{ intervalle ouvert.}\\
[a; b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} : \text{ intervalle fermé.}\\
]a; b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} : \text{ intervalle semi-ouvert (à gauche).}\\
[a; b[ &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} : \text{ intervalle semi-ouvert (à droite).}
\end{aligned}
$$

## 1.3 Opérations sur les ensembles

**Définition 1.1** *La **réunion** de deux ensembles $A$ et $B$ est le nouvel ensemble consistant en la réunion des éléments de $A$ et des éléments de $B$. La réunion de $A$ et $B$, notée $A \cup B$ , qui se lit "A union B" est définie comme suit :*
*$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.*

*Le terme "ou" est employé ici dans le sens de et/ou.*

**Exemple 1.4** *Si $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On notera que l'élément 3 qui se trouve dans $A$ et dans $B$ n'est pas répété dans $A \cup B$.*

**Définition 1.2** *L'**intersection** de deux ensembles $A$ et $B$ est le nouvel ensemble formé des éléments communs à $A$ et $B$. L'intersection de $A$ et $B$, notée $A \cap B$ est définie par : $A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$.*

**Exemple 1.5** *Si $A = \{x : x \text{ est un multiple de } 4\}$ et $B = \{x : x \text{ est un multiple de } 6\}$, alors $A \cap B = \{x : x \text{ est un multiple de } 12\}$.*

**Définition 1.3** *La **différence** entre deux ensembles $A$ et $B$ est le nouvel ensemble formé des éléments qui appartiennent à $B$ mais pas à $A$. La différence entre $B$ et $A$, notée $B - A$, est définie par :*

*$B - A = \{x : x \in B \text{ et } x \notin A\}$.*

**Exemple 1.6** *Si* $A = \{1,2,3\}$ *et* $B = \{1,2,3,4,5\}$, $B{-}A = \{4,5\}$.

**Définition 1.4** *Le* ***complémentaire*** *d'un ensemble A est le nouvel ensemble formé des éléments qui n'appartiennent pas à A. Le complémentaire de A, noté* $\overline{A}$ *, est défini par :* $\overline{A} = \{x\colon\ x \in \Omega \text{ et } x \notin A\ \}$.

À titre d'exemple, démontrons que l'intersection est **distributive** par rapport à la réunion, propriété que l'on peut énoncer sous la forme d'un théorème.

**Théorème 1.1** *Quels que soient les ensembles A,B et C, alors :*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**Démonstration**
Il s'agit de démontrer que tout élément de l'ensemble A∩(B∪C) appartient à l'ensemble (A∩B)∪(A∩C), puis que tout élément de (A∩B)∪(A∩C) appartient à A∩(B∪C) ; ainsi, par définition, les deux ensembles seront égaux.

Soit $x$ un élément de A∩(B∪C). Cet élément appartient à A d'une part et d'autre part à l'un au moins des ensembles B et C. Par conséquent, ou bien $x$ appartient à A et à B, donc à A∩B ou bien $x$ appartient à A et à C, donc à (A∩C) ; $x$ appartient donc à l'ensemble (A∩B)∪(A∩C).

Soit $x$ un élément de (A∩B)∪(A∩C). Si $x$ n'appartient pas à (A∩B), il appartient forcément à (A∩C), donc à A et à C. Si $x$ n'appartient pas à (A∩C), il appartient nécessairement à (A∩B), donc à A et à B. Dans les deux cas, $x$ appartient à A d'une part et d'autre part au moins à B ou à C. Donc $x$ appartient à A∩(B∪C). Ce qu'il fallait démontrer (c.q.f.d).

Démontrons le même théorème, mais cette fois sous forme plus concise :

$$x \in \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & \in & \mathrm{A} \\ \text{et } x & \in & \mathrm{B} \cup \mathrm{C} \end{array} \right.$$

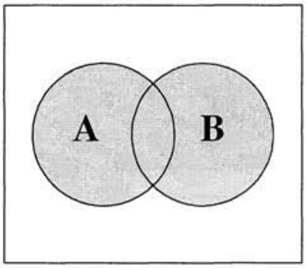
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & \in & \mathrm{A} \\ \text{et } (x & \in & \mathrm{B} \text{ ou } x \in \mathrm{C}) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (x \in \mathrm{A} & \text{et} & x \in \mathrm{B}) \\ \text{ou } (x \in \mathrm{A} & \text{et} & x \in \mathrm{C}) \end{array} \right.$$

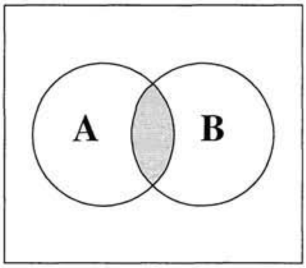
$$\Leftrightarrow x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$$

c.q.f.d.

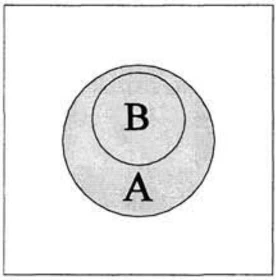
On peut représenter les ensembles et les opérations sur ces ensembles à l'aide de diagrammes qu'on appelle diagrammes de Venn. La surface grisée représente l'ensemble indiqué en-dessous de chaque diagramme.



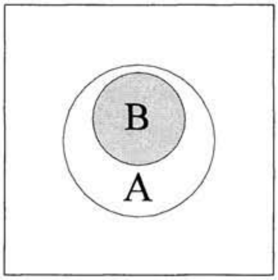

$A \cup B$



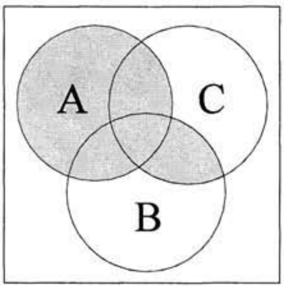

$A \cap B$



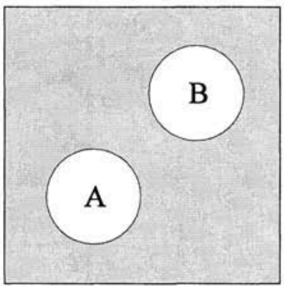

$A \cup B = A$




$A \cap B = B$




$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$




$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

## 1.4 Produit cartésien et cardinalité

René du Perron Descartes (1596-1650), né en France dans la province de Touraine, fut philosophe, mathématicien et scientifique. Son idée selon laquelle l'algèbre pouvait être utilisée comme méthode générale pour la géométrie le fit passer pour le fondateur de la géométrie analytique. Dans le domaine de la notation, il introduisit le système des exposants ($x^2$,$x^3$,...) et commença à utiliser les premières lettres de l'alphabet pour se référer à des quantités connues et les dernières lettres pour représenter les inconnues.

On appelle **produit cartésien** de deux ensembles E et F, l'ensemble des **couples ordonnés** $(x; y)$ où $x \in$ E et $y \in$ F. On le note E×F et on lit "E croix F". Les éléments $(x; y)$ sont des couples ordonnés et non des ensembles. L'ordre dans lequel on écrit $x$ et $y$ est fondamental. Le premier élément $x$ du couple appartient au premier ensemble et le deuxième élément au deuxième ensemble.

**Définition 1.5** *Un ensemble est dit* ***fini*** *s'il contient un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments d'un ensemble s'appelle* ***cardinal*** *de l'ensemble. On le note Card(E). Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.*

**Exemple 1.7** *Si* $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *et* $B = \{1, 3, 5\}$, *alors il y aura* $5 \cdot 3 = 15$ *éléments dans* $A \times B$*:* $(0; 1), (0; 3), (0; 5), (1; 1), \ldots, (4; 3), (4; 5)$. *De façon plus générale,* ***si*** *A* ***et*** *B* ***sont des ensembles finis, alors :***
***Card(A×B) = Card(A)·Card(B).***

**Définition 1.6** *Soit un ensemble E. Tous les sous-ensembles de E peuvent être considérés comme les éléments d'un nouvel ensemble que l'on appelle* ***ensemble des parties*** *de l'ensemble E, noté* $\mathcal{P}(E)$.

**Exemple 1.8** *Soit E = {a,b,c}. Les sous-ensembles de E sont :* $\emptyset$*,{a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}.*
*Ainsi :* $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\}, \{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.
*On notera que* $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$.

Plus généralement, si E contient $n$ éléments, $\mathcal{P}$(E) contiendra $2^n$ éléments.

**Théorème 1.2** *Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E, alors :*
***Card(A∪B) + Card(A∩B) = Card(A) + Card(B).***

**Démonstration**
Le nombre d'éléments de "A union B" est égal au nombre d'éléments de A plus le nombre d'éléments de B auquel on retranche le nombre d'éléments en

commun à A et B, car ils ont été comptés deux fois, d'où :
Card(A∪B) = Card(A) + Card(B) − Card(A∩B). c.q.f.d.

Si A∩B = ∅, alors on obtient la formule :

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B).$$

## 1.5 Les variables

Il s'agit de distinguer deux sortes de quantités : les **constantes** et les **variables**. Une constante est une quantité prenant une valeur fixe. Les **constantes numériques** gardent la même valeur dans tous les problèmes. Les **constantes arbitraires** ou **paramètres** gardent la même valeur tout au long d'un problème particulier.

La **valeur absolue** d'une constante, notée $\mid c \mid$, représente la grandeur de cette constante sans tenir compte de son signe. Nous avons donc :

$\mid c \mid = \mid -c \mid = c$ si $c$ est non négatif.

$\mid c \mid = \mid -c \mid = -c$ si $c$ est négatif.

Voici quelques propriétés de la valeur absolue :
Soient $c_1$ et $c_2$, deux nombres réels.

i. $\mid c_1 + c_2 \mid \; \leq \; \mid c_1 \mid + \mid c_2 \mid$
ii. $\mid c_1 \cdot c_2 \mid \; = \; \mid c_1 \mid \cdot \mid c_2 \mid$
iii. $\left|\dfrac{c_1}{c_2}\right| = \dfrac{\mid c_1 \mid}{\mid c_2 \mid}, \quad c_2 \neq 0$
iv. Si $\mid c_1 \mid < \mid c_2 \mid$, alors $\dfrac{1}{\mid c_1 \mid} > \dfrac{1}{\mid c_2 \mid}, \quad c_1 \neq 0, c_2 \neq 0.$

Une **variable** est une quantité qui peut prendre différentes valeurs tout au long d'un même problème. Une variable peut être **continue** ou **discrète**. Une variable continue est une variable qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle à l'intérieur d'un intervalle. Les valeurs successives d'une variable continue diffèrent d'une quantité infinitésimale. Une variable discrète est une variable qui prend uniquement certaines valeurs dans un intervalle.

Il est d'usage de noter les constantes par les premières lettres de l'alphabet et les variables par les dernières lettres. Toutefois, dans l'application des mathématiques, par exemple en économie, une variable est souvent désignée par la première lettre de son nom: $p$ pour prix, $q$ pour quantité, $c$ pour coût, etc.

**Exemple 1.9** *Dans l'expression de l'aire du disque $A = \pi r^2$, $\pi$ est une constante numérique, $r$ le rayon et $A$ sont des variables.*

Les variables et les constantes appartiennent à l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Le quotient de deux nombres $a$ et $b$ est égal à un nombre $x$: $\frac{a}{b} = x$.

On en tire: $a = bx$. En rapport avec cette définition, la division par 0 n'est pas admissible. En effet, si $b = 0$, $a = 0 \cdot x$ qui n'est vrai que si $a = 0$; mais dans ce cas, on peut donner à $x$ n'importe quelle valeur. Donc le quotient $\frac{a}{b}$, lorsque $b = 0$ et $a = 0$ peut prendre n'importe quelle valeur. L'expression $\frac{a}{0}$ est appelée **indéfinie** si $a \neq 0$ et l'expression $\frac{0}{0}$ est appelée **indéterminée**.

Notons que $\frac{0}{b} = 0$ pour $b \neq 0$ puisque $\frac{0}{b}$ est la valeur de $x$ pour laquelle $bx = 0$ et que cette valeur doit être nulle quand $b \neq 0$.

## 1.6 Relations et fonctions

Dans la vie courante, nous rencontrons à chaque instant des variables qui dépendent d'autres variables. Par exemple, le temps de freinage d'une voiture dépend de la vitesse de la voiture, ou encore le nombre de marches d'un escalier dépend de la hauteur de l'escalier, etc.

**Définition 1.7** *Un ensemble de **paires ordonnées** de nombres réels est appelé une relation binaire.*

L'ensemble des premiers nombres d'une relation binaire est l'**ensemble de départ**, ou **domaine** de la relation. Le deuxième ensemble est l'**ensemble d'arrivée** de la relation. L'ensemble de départ contient les valeurs que prend la **variable** $x$ appelée **variable indépendante**. L'ensemble d'arrivée contient les valeurs que prend la **variable** $y$ appelée **variable dépendante**.

On attribue à la variable indépendante des valeurs arbitraires qui vont déterminer les valeurs de la variable dépendante.

En général, on note par $x$ la variable indépendante, et par $y$ la variable dépendante.

**Exemple 1.10** *$A = \{(x,y) :\ x, y \in \mathbb{N},\ x \leq y\}$ est une relation binaire dont quelques couples sont: $(1;1)$, $(1;2)$, $(5;20)$, etc. Notons que $(3;2)$, $(8;6)$, $(25;21)$ par exemple, n'appartiennent pas à $A$.*
*$B = \{(x;y):\ y = 2x - 1, x \in \mathbb{R}\}$ est une relation binaire où l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$ et l'ensemble d'arrivée est aussi $\mathbb{R}$. Quelques exemples de couples: $(0; -1)$, $(0.5; 0)$, $(1.41; 1.82)$, etc.*

**Définition 1.8** *Si une relation est telle qu'à chaque élément de l'ensemble de départ est associé* **un et un seul élément** *de l'ensemble d'arrivée, on dit que c'est une* ***fonction***.

**Toutes les fonctions sont des relations, mais toutes les relations ne sont pas des fonctions**. Selon la définition, dans l'exemple 1.10, B est une fonction mais A n'est pas une fonction.

On représente traditionnellement une fonction par une lettre minuscule: $f$ (ou $g$, ou $h$, etc.). Si la fonction $f$ associe à l'élément $x$ de l'ensemble de départ E, l'élément $y$ de l'ensemble d'arrivée F, on écrit:

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F} \\ & x \longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

On dit que $y$ est l'**image** de $x$ par la fonction $f$. Au cours d'un même problème particulier, le même symbole fonctionnel indique toujours la même loi de dépendance de la fonction.

**Exemple 1.11** *Si $f(x) = x^2 + x - 2$, alors:*

$$\begin{aligned} f(a) &= a^2 + a - 2 \\ f(1) &= 1 + 1 - 2 = 0 \\ f(-2) &= 4 - 2 - 2 = 0 \\ f(x+2) &= (x+2)^2 + (x+2) - 2 = x^2 + 5x + 4 \\ f(x+h) - f(x) &= (x+h)^2 + (x+h) - 2 - (x^2 + x - 2) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + x + h - 2 - x^2 - x + 2 \\ &= 2xh + h^2 + h. \end{aligned}$$

On définit la somme, la différence, le produit et le quotient de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de la manière suivante:

- **Somme de deux fonctions :** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- **Différence de deux fonctions :** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
- **Produit de deux fonctions :** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- **Quotient de deux fonctions :** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$.
- On peut finalement définir la **composition de deux fonctions** $y = f(x)$ et $z = g(y)$ par : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

  Cette nouvelle fonction est notée $h = g \circ f$ qui se lit " $g$ rond $f$ ". On trouve $h(x)$ en substituant la première fonction dans la deuxième : $h(x) = g(f(x))$. On peut résumer la composition des fonctions par le schéma suivant :

$$x \overset{f}{\longmapsto} y \overset{g}{\longmapsto} z$$
$$x \overset{h=g\circ f}{\longmapsto} z$$

**Note** En général, $\mathbf{f(g(x)) \neq g(f(x))}$.

**Exemple 1.12** *Si* $f(x) = x^2 + x + 1$ *et* $g(x) = x + 1$ *, alors :*

$$\begin{aligned} g(f(x)) &: \quad x \overset{f}{\longmapsto} x^2 + x + 1 = y \overset{g}{\longmapsto} z = y + 1 \\ x \overset{g\circ f}{\longmapsto} z &= \quad (x^2 + x + 1) + 1 = x^2 + x + 2 \\ f(g(x)) &: \quad x \overset{g}{\longmapsto} x + 1 = y \overset{f}{\longmapsto} z = y^2 + y + 1 \\ x \overset{f\circ g}{\longmapsto} z &= \quad (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 3x + 3 \end{aligned}$$

*Dans cet exemple,* $g(f(x))$ *est bien différent de* $f(g(x))$.

**Définition 1.9** *On appelle* ***surjection*** *ou* ***fonction surjective*** *une fonction telle que* ***tout élément y*** *de l'ensemble d'arrivée* $F$ *soit l'image* ***d'au moins un élément x*** *de l'ensemble de départ* $E$. $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.

**Exemple 1.13** *Soient les ensembles* $E = \{x \in \mathbb{R} \colon -2 \leq x \leq 2\}$ *et* $F = \{y \in \mathbb{R} \colon 0 \leq y \leq 4\}$, *alors la fonction* $f \colon E \longrightarrow F$ *définie par* $f(x) = x^2$ *est surjective.*

En effet, si $y \in \mathrm{F}$, $y$ est un nombre positif ou nul, inférieur ou égal à 4 et $\sqrt{y}$ est un nombre réel positif ou nul, inférieur ou égal à 2 : $\sqrt{y} \in \mathrm{E}$ et $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$. Ainsi, $x = \sqrt{y}$ vérifie $x \in \mathrm{E}$ et $f(x) = y$. Il est à relever que l'on a aussi : $-\sqrt{y} \in \mathrm{E}$ et $f(-\sqrt{y}) = y$.

**Exemple 1.14** *Soit la fonction* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *définie comme suit :* $x \mapsto 2x$. *L'ensemble d'arrivée est alors l'ensemble des nombres pairs. Cette fonction n' est pas surjective puisque 5 n'est l'image d'aucun élément* $x \in \mathbb{Z}$ *, ainsi que tous les nombres impairs.*

**Définition 1.10** *Une application f est dite* ***injective*** *si et seulement si deux éléments quelconques distincts de l'ensemble de départ ont deux images par f distinctes :* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ *ou encore* $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Une injection (ou fonction injective) est en fait une fonction telle que chaque élément $y$ de l'ensemble d'arrivée soit l'image d'au plus un élément $x$ de l'ensemble de départ.

**Exemple 1.15** *Soit la fonction* $f(x) = 3x + 2$.
*Elle est injective car :*

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 3x_1 + 2 &= 3x_2 + 2 \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

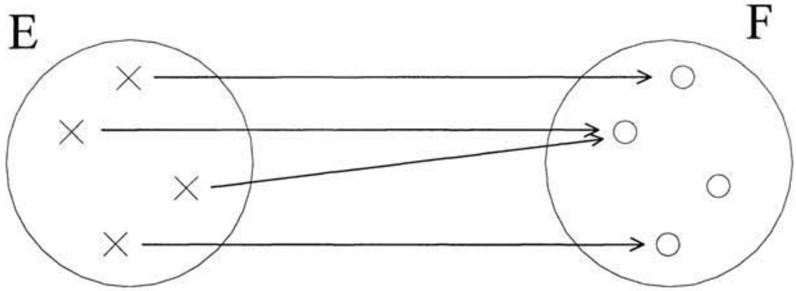
**Définition 1.11** *On appelle* ***bijection*** *ou* ***fonction bijective*** *une fonction qui est à la fois* ***surjective et injective****. Si* $f(x)$ *est une bijection, chaque élément* $y$ *de l'ensemble d'arrivée est l'image d'un unique élément* $x$ *de l'ensemble de départ.*

**Exemple 1.16** *Soit la fonction* $\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto f(x) = x - 2. \end{aligned}$
*Cette fonction est bijective car tout élément* $y \in \mathbb{Z}$ *est l'image du seul élément* $x = y + 2$ *de* $\mathbb{Z}$ *. On peut calculer quelques couples :*

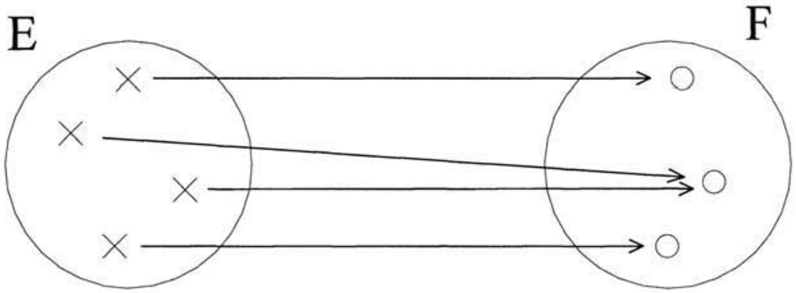
| $x$ | $\dots$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\dots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\dots$ |

Nous allons, pour terminer ce paragraphe, schématiser les différentes notions que nous venons d'aborder.

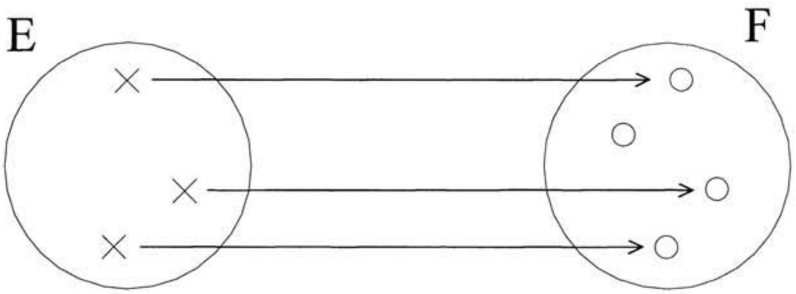
L'ensemble de départ est noté par E et l'ensemble d'arrivée par F ; les croix représentent les éléments de E et les ronds les éléments de F. Les flèches lient un élément de E à un élément de F pour former un couple $(x; y)$.



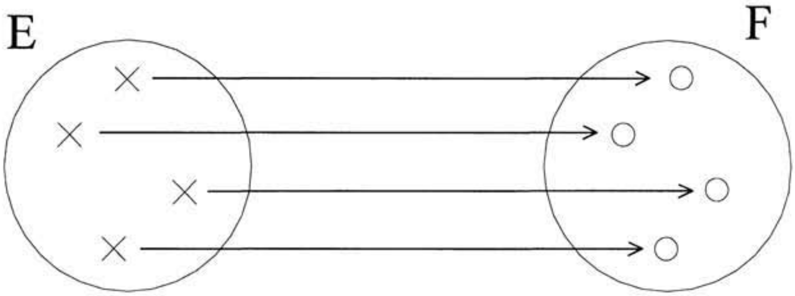

**Fonction** : Tout élément $x$ de E a une image unique $y$ dans F.




**Surjection** : Tout élément de F est image.




**Injection** : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.




**Bijection** : Injection **et** surjection.

# 1.7 Fonction inverse

Si $f(x)$ est une bijection telle que $x \longmapsto y$, il existe une et une seule bijection telle que $y \longmapsto x$. On dit que cette fonction est la **fonction inverse** de $f$ et on la désigne par $f^{-1}(x)$. On trouve $f^{-1}(x)$ en résolvant l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable $x$, ce qui donne $x = g(y)$, c'est-à-dire que $y$ est la variable indépendante et $x$ la variable dépendante.

**Exemple 1.17** *Soit $f(x) = 2x + 4$. La fonction inverse $f^{-1}(x)$ se trouve de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} y &= 2x + 4 \\ \Rightarrow y - 4 &= 2x \\ \Rightarrow x &= \frac{y-4}{2}. \end{aligned}$$

*Nous avons donc $x = g(y) = \dfrac{y-4}{2}$. Par conséquent, la fonction inverse est $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{2}$ puisqu'il est d'usage d'employer la lettre $x$ pour la variable indépendante et la lettre $y$ pour la variable dépendante.*

# 1.8 Fonctions explicites et implicites

Jusqu' ici, nous avons toujours vu les fonctions sous la forme : $y = f(x)$. La variable dépendante est $y$ et elle est en quelque sorte explicitée par $x$, d'où le nom de **fonction explicite** quand $y$ est écrit en fonction de $x$. En revanche, une **fonction implicite** est une fonction où **les deux variables apparaissent du même côté de l'équation**.

**Exemple 1.18** $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$ *est une fonction explicite, tandis que* $x^2 - 5y = 6$ *est une fonction implicite.*

Il est parfois possible de résoudre l'équation d'une fonction implicite par rapport à l'une ou l'autre des variables pour obtenir ainsi une fonction explicite. Dans l'exemple 1.18, on peut écrire $x^2 - 5y = 6$ sous la forme explicite $y = f(x)$: $x^2 - 5y = 6 \Rightarrow y = \dfrac{x^2-6}{5}$.

Mais la forme explicite $x = f(y)$ n'est pas une fonction. En effet,

$$x^2 - 5y = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5y+6}$$

par exemple $y = 38$ a deux images : $x = -14$ et $x = 14$.

Quand, à partir d'une fonction implicite, on parvient à écrire deux fonctions explicites, ces deux fonctions explicites sont alors réciproques l'une de l'autre.

**Exemple 1.19** *Soit la fonction implicite* $3x - y = 0$*. Les deux fonctions explicites et réciproques l'une de l'autre sont :* $y = 3x$ *, et* $x = \dfrac{1}{3}y$*.*

# Exercices

1. Soient les ensembles :

   $A = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \text{ est un multiple de } 2\}$.

   $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \text{ est un multiple de } 3\}$.

   $C = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \text{ est un multiple de } 6\}$.

   $D = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \text{ est un multiple de } 8\}$.

   Déterminer : i) $A \cap B$ ; ii) $A \cap C$ ; iii) $A \cup C$ ; iv) $B \cup C$ ; v) $C \cap D$.

2. Soient $A$ et $B$ des sous-ensembles de $\Omega$. Illustrer à l'aide de diagrammes de Venn les deux règles de Morgan :

   $\overline{(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$ et $\overline{(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$.

3. En utilisant les quantificateurs, montrer que la réunion est distributive par rapport à l'intersection, c'est-à-dire, quels que soient les ensembles $A$, $B$ et $C$, démontrer que :

   $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$.

4. Soit $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{4, 5\}$. Déterminer :

   (a) $A \times (B \cup C)$.

   (b) $(A \times B) \cup (A \times C)$.

   (c) $A \times (B \cap C)$.

   (d) $(A \times B) \cap (A \times C)$.

5. Soit $E$, un ensemble tel que $Card(E) = 30$. Si $A$ et $B$ sont deux sous-ensembles de $E$ non disjoints ($A \cap B \neq \emptyset$) tels que $Card(A) = 20$, $Card(B) = 15$ et $Card(A \cap B) = 6$, trouver $Card(A \cup B)$.

6. Les résultats d'une entreprise ont montré que sur 50 employés, 30 sont obèses, 25 souffrent d'hypertension artérielle tandis que 20 ont un taux de cholestérol trop élevé. Parmi les 25 qui souffrent d'hypertension, 12 ont un taux de cholestérol trop élevé ; 15 obèses souffrent d'hypertension et 10 obèses souffrent d'un taux de cholestérol trop élevé ; finalement, 5 employés souffrent de ces trois maux à la fois.

   Déterminer le nombre d'employés bien portant à l'aide d'un diagramme de Venn.

7. Sur 100 étudiants, on considère les ensembles $S$ de ceux qui étudient la sociologie, $E$ de ceux qui étudient l'économie et $G$ de ceux qui étudient la gestion. Sur ces 100 étudiants, 55 étudient la sociologie, 9 la sociologie et la gestion, 7 la sociologie et l'économie, 8 l'économie et la gestion, 6 la sociologie et la gestion mais pas l'économie, 80 la sociologie ou la gestion et 12 l'économie seulement.

   (a) Combien d'étudiants suivent les trois matières?

   (b) Combien sont-ils à étudier la gestion?

   (c) Combien sont-ils à étudier l'économie?

   (d) Combien n'étudient aucune de ces trois matières?

8. Lesquels parmi ces ensembles représentent une fonction?

   $S_1 = \{(1;2), (2;8), (2;3)\}$.
   $S_2 = \{(x;y) : x \in \mathbb{R}\ , x \leq y\}$.
   $S_3 = \{(x;y) : y = x^2, x \in \mathbb{R}\ \}$.
   $S_4 = \{(x;y) : y = x^2 \text{ si } 0 \leq x \leq 2, y = 3 - x \text{ si } 2 < x < 3$
   $\text{et } y = 3 \text{ si } x = 3\}$.

9. Soit la fonction $f\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 2x + 4. \end{array}$

   Calculer : $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

10. Montrer que la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

    est bijective, c'est-à-dire injective et surjective.

11. Montrer que la fonction $f\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 2 \end{array}$

    n'est pas injective.

12. (a) Trouver une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit injective mais non surjective.

(b) Trouver une fonction $g\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit surjective mais non injective.

(c) Trouver une fonction $h : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ qui ne soit ni injective ni surjective, où $[0;1]$ désigne : $\{x \in \mathbb{R}\ :\ 0 \leq x \leq 1\}$.

13. On considère les fonctions : $f(x) = x + 2$ et $g(x) = 2x + 5$.

    (a) Calculer $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$
    et $m(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

    (b) Calculer $f^{-1}(x)$ et $g^{-1}(x)$.

    (c) Calculer $h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$ et $m^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$.

    (d) Calculer $f^{-1}(g^{-1}(x))$ et $g^{-1}(f^{-1}(x))$.

    (e) Comparer les résultats obtenus sous (c) et (d). Que constate-t-on ?

14. Déterminer les deux fonctions explicites déduites de la fonction implicite :

$$x + 2y - 8 = 0$$

Que peut-on dire de ces deux fonctions ?


## EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)

On connaît peu de choses sur la vie d'Euclide à l'exception du fait qu'il ait enseigné à Alexandrie.

Euclide est certainement le mathématicien le plus prolifique de l'Antiquité. On lui doit l'un des plus célèbres textes de l'histoire des mathématiques : *Les Éléments*. Il s'agit d'un traité regroupant toutes les connaissances géométriques de l'époque. Composé de treize livres, il couvre la géométrie plane, la théorie des nombres, la théorie des nombres irrationnels, la géométrie solide, et s'achève sur une discussion à propos des propriétés des 5 polyhèdres. Ce traité devint l'ouvrage de référence dans l'enseignement mathématique durant deux mille ans. Plus de mille éditions furent tirées depuis la première en 1482.

Euclide écrivit également des textes sur l'astronomie, l'optique et la musique.

Œuvres majeures retrouvées : *On Divisions*, *Optics and Phaenomena* ; perdues : *Surface Loci*, *Porisms*, *Conics*, *Book of Fallacies*, *Elements of Music*.