MATHÉMATIQUES
&
APPLICATIONS

Directeurs de la collection :
G. Allaire et M. Benaïm

64

Jean-Michel Rakotoson

Réarrangement Relatif

Un instrument d'estimations dans les problèmes aux limites

Springer

Jean-Michel Rakotoson

Laboratoire d'Applications des Mathématiques
Université de Poitiers
Boulevard Marie et Pierre Curie
Téléport 2, BP 30179
86962 Futuroscope Chasseneuil cedex
France
Jean-Michel.Rakotoson@math.univ-poitiers.fr

Library Congress Control Number: 2008928565

Mathematics Subject Classification (2000): 46E30, 46E35, 42B25, 35B45, 35B65, 35B50, 35J20, 35K65, 35J70, 35K55, 82D10

ISSN 1154-483X
ISBN-10 3-540-69117-0 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-69117-4 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media

springer.com
WMXDesign GmbH

Imprimé sur papier non acide 3100/SPi - 5 4 3 2 1 0 -

Je dédie ce livre à ma grande famille,
à tous mes professeurs de Mathématiques,
et en particulier à la mémoire de François Razanamparany.

Avant-propos

Je remercie avant tout mes deux enseignants, le Professeur Roger Temam et Madame Jacqueline Mossino, qui sont les premiers à étudier la dérivée directionnelle du réarrangement monotone et qui m'ont donné cette opportunité de m'initier à cette notion qu'ils ont bâptisée réarrangement relatif. Ils étaient aussi mes co-auteurs dans l'étude de plusieurs propriétés démontrées aux chapitres 2, 3, et 9.

Que mes différents collaborateurs trouvent ici ma profonde reconnaissance, en particulier Idelfonso Díaz de l'Université Complutense de Madrid, qui a apporté un merveilleux problème issu de la physique des plasmas. Ce modèle lié aux machines dites "Stellarator" a posé plusieurs questions ouvertes sur le réarrangement relatif. Cela m'a conduit à plusieurs développements des propriétés du réarrangement relatif en particulier les résultats du chapitre 7.

Il en est de même du professeur Denis Serre de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, qui m'a soumis le problème multicontrainte donné en exemple à l'introduction du chapitre 8. Ce problème a permis de développer une belle application de la notion du réarrangement relatif exposée dans ce chapitre.

Enfin, je termine mes remerciements au Professeur Marisa Seosane de l'Université de Santiago de Compostella (Saint Jacques de Compostelle) avec qui j'ai écrit plusieurs articles dont certains résultats sont dans ce livre, et à tous mes amis et collaborateurs italiens dont le Professeur Alberto Fiorenza de Naples, qui a introduit les petits espaces de Sobolev qui ont donné naissance à des applications des inégalités ponctuelles pour le réarrangement relatif.

J'adresse un merci particulier à Abdallah El Hamidi qui a bien voulu relire mon manuscrit et à Catherine Falaise-Bougant pour la mise en forme de ce document. Les remarques des référés anonymes m'ont permis d'améliorer le texte, qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance. J'exprime toute ma gratitude à Bernard Saramito et aux éditeurs de la collection pour avoir accepté ce livre dans cette série.

Poitiers,

Juillet 2007 *Jean Michel Rakotoson*

Préface

Quand on parle des inclusions de Sobolev, la plupart du temps on pense à celles associées aux espaces de Lebesgue. Les techniques pour obtenir les inégalités associées ou correspondantes sont fondées soit sur une représentation intégrale de la fonction à estimer (c'est la méthode originelle de Sobolev (voir les livres de Gilbard-Trudinger [68])), soit sur l'usage de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (voir les livres de Brézis [24] ou de Adams [1] ou de J.E. Rakotoson -J.M. Rakotoson [88]). Quand on essaie de passer à des espaces plus généraux comme les espaces de Lorentz, les espaces de Birnbaum-Orlicz, les espaces de Zygmund $L^{\beta}(\text{Log } L)^{\alpha}$ ou tout autre espace normé comme celui récemment introduit par Alberto Fiorenza [60] : les petits espaces de Lebesgue, ces techniques usuelles pour obtenir les inclusions de Sobolev classiques ne sont plus facilement adaptables pour prouver les inclusions de Sobolev associées à ces espaces.

Ici, on propose des inégalités ponctuelles qui lient une fonction et son gradient. Ces inégalités s'avèrent être la racine de nombreuses inégalités de type Sobolev associées à des espaces normés, c'est à dire si $\rho,\ \rho_0$ sont deux normes, $W^1(\Omega,\rho)$ un espace de Sobolev associé à la norme $\rho,\ L(\Omega,\rho_0)$ l'espace normé associé à ρ_0, on donne des conditions (appelées indices d'inclusion) pour que $W^1(\Omega,\rho)\subset L(\Omega,\rho_0)$ avec une inclusion "continue".

Outre les inclusions de Sobolev, on montrera que ces inégalités conduisent aussi à des inégalités d'interpolation de type Gagliardo-Nirenberg.

Un autre avantage de la méthode que nous allons présenter, est de pouvoir estimer les constantes qui apparaissent dans ces inégalités. Voici un exemple d'inégalité fréquemment utilisée que nous redémontrons :

si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout élément $u\in H_0^1(\Omega)$ on a

$$|u|_{L^4(\Omega)}\leqslant\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}|u|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\,|\nabla u|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\,,$$

ou encore, nous montrerons que pour des espaces $W^1(\Omega,\rho)$ qui s'injectent dans l'ensemble des fonctions continues on a :

$$\underset{B(x,r)\cap\Omega}{\operatorname{osc}} u \leqslant \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{N}}}{\alpha_{N-1}} \rho_{B(x,r)}(\nabla u)$$

où α_m désigne la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^m$,
$\rho_{B(x,r)}$ désigne la restriction de la norme ρ aux applications définies sur la boule $B(x,r)$ de centre x et de rayon $r > 0$.

Dans le cas particulier des espaces de Lorentz, un tel résultat a été démontré par E.M. Stein [118], mais sans l'estimation de la constante. Sa méthode est basée sur une représentation intégrale de la fonction u et l'usage de la théorie des opérateurs du type faible (voir le livre de Bennett-Sharpley [17]).

Pour obtenir ces précisions dans les estimations nous avons classé les fonctions que nous étudions, en trois grandes catégories selon leurs conditions au bord du domaine Ω :

1. Les fonctions à trace nulle
2. Les fonctions à trace partiellement nulle
3. Les fonctions à trace quelconque

Ces inégalités ponctuelles peuvent être obtenues dans les problèmes aux limites. Ce qui conduit à des théorèmes de régularité pour les espaces normés i.e. on peut répondre partiellement à la question : si f appartient à un espace normé $L(\Omega,\rho)$ que peut-on dire de la solution u?

Pour des raisons de clarté, nous avons souvent illustré ces résultats en choisissant les espaces de Lorentz et de Lebesgue suivant les conditions aux limites (1) ou (2) ou (3) précédentes. On peut les remplacer par les espaces cités ci-dessus ou par tout autre espace normé dont la norme vérifie certaines propriétés.

L'obtention de ces inégalités ponctuelles se fait par l'intermédiaire du réarrangement monotone et relatif dont les définitions et propriétés sont introduites au chapitres 1 et 2. L'un des principaux avantages de ces réarrangements est que ce sont des transformations qui envoient l'ensemble des fonctions mesurables $L^0(\Omega)$ dans l'ensemble des fonctions mesurables sur un intervalle de même mesure $\Omega_* =]0, |\Omega|[$ en conservant certaines "qualités" de la fonction d'origine.

Ces propriétés de conservation sont illustrées par les propriétés d'équimesurabilité pour le réarrangement monotone, les inégalités ponctuelles du type Polyà-Szëgo, du chapitre 3 ou encore les opérateurs moyennes pour le réarrangement relatif.

Au chapitre 4, on établit alors les inégalités ponctuelles résultant des formules intégrales de Fleming-Rishel, des inégalités isopérimétriques et les propriétés des réarrangements monotones et relatifs. On les applique aux inclusions non classiques et aux interpolations.

Au chapitre 5, on aborde la question d'estimations ponctuelles pour des problèmes aux limites telles les équations quasilinéaires, les équations relevant de la physique des plasmas pour une machine dite Tokamak.

Certains problèmes de la physique se modélisent en utilisant directement ces outils de réarrangements monotones et relatifs. Ce qui est assez naturel puisque le réarrangement monotone est l'inverse de la fonction "volume" des ensembles de niveau. Une illustration graphique est donnée à la fin du premier chapitre.

Quant à la notion de réarrangement relatif, d'une fonction b par rapport à une autre fonction u, son interprétation dépend de u, si u est une fonction étagée par exemple, alors la réarrangée de v par rapport à u est une fonction définie par morceaux obtenue en considérant les réarrangements monotones des restrictions de v aux plateaux de u. Par contre si u est "régulière", alors la fonction réarrangée de v par rapport à u est une moyenne pondérée de v sur une surface de niveau de u. Une illustration graphique est donnée à la fin du chapitre 2.

Pour résoudre ces problèmes où interviennent le réarrangement monotone et sa dérivée première, nous avons repris les théorèmes de Coron-Almgrem-Lieb mais en les exposant autrement. Certaines preuves sont donc différentes de celles originellement données par leurs auteurs, c'est l'objet du chapitre 6.

Quant au chapitre 7, il répond aux mêmes interrogations que le chapitre 6 mais pour le réarrangement relatif qui intervient dans le cadre des modèles de la physique des plasmas relevant d'une machine Stellarator. Nous donnons quelques uns de ces modèles dits non locaux au chapitre 8 en utilisant un cadre abstrait.

Tout ce qui a été décrit précédemment s'adapte aux cas d'une famille de fonctions paramétrées, par exemple, les fonctions dépendant du paramètre temps. C'est l'objet du chapitre 9 où nous montrons que le réarrangement relatif peut servir à l'étude de la régularité en temps du réarrangement monotone d'une famille de fonctions.

Comme dans le cas des problèmes stationnaires, on peut obtenir des estimations ponctuelles pour ces fonctions paramétrées. Nous illustrons cela pour des équations quasilinéaires et un système d'équations relevant d'un système Chemotaxis.

Puisque ce cours a été proposé en partie en D.E.A. de mathématiques à l'Université de Poitiers, nous proposons au chapitre 10 quelques exercices et des solutions ou indications de solutions au chapitre 11.

Remarques préliminaires

Nous avons opté de numéroter les théorèmes, lemmes, corollaires, propositions comme suit : de gauche à droite, lire le numéro du chapitre ensuite vient le numéro du paragraphe et le nombre le plus à droite est le numéro du théorème, lemme, corollaire ou proposition.

On utilisera des symboles abrégés :

- p.p. ou pp pour signifier presque partout
- t.q. ou tq signifient tel que (ou telle que, tels que...)

Table des matières

Index de symboles

- $I\!R^N$ espace euclidien de dimension N.
- $x \cdot y$ produit scalaire euclidien.
- $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ norme euclidienne.
- V' ou V^* dual topologique d'un Banach V.
- $< .,. >$ crochet de dualité entre V et son dual.
- $\overline{F}^V$ (ou simplement $\overline{F}$) adhérence de F dans V.
- $\mathcal{C}_V F = F^c$ complémentaire de F dans V.
- $B(x,r) = \{y : |x-y| < r\}$ boule ouverte de centre x et de rayon r, $B(0,r) = B_r$.
  S'il n'y a pas de confusion, on note de la même manière la boule fermée. $B(0,1)$ est appelée boule unité.
- $|E|$ ou mes(E) mesure de Lebesgue d'un ensemble E.
- χ_E fonction caractéristique de E.
- $\displaystyle\int_\Omega f = \int_\Omega f(x)dx$ intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue.
- $f * g$ convolution de f et de g.
- $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ dérivée partielle par rapport à la variable x_i.
- $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_N}\right)$ gradient de f.
- $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N}}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2\cdots\partial^{\alpha_N}x_N} f,\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

- **Les espaces $C^k(\Omega)$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$=$C_c^\infty(\Omega)$**
  - $C(\Omega) = C^0(\Omega) = \{v : \Omega \longrightarrow I\!R \text{ continue}\}$
  - supp$\,(v)$=support de v

– $C(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to I\!R$ bornée, continue et qui peut être prolongée en une fonction continue sur $\overline{\Omega}\}$

– Pour $k \geqslant 1$, $k \in I\!N$,
 · $C^k(\Omega) = \big\{v \in C^{k-1}(\Omega), D^\alpha v \in C(\Omega),\ |\alpha| = k\big\}$
 · $C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k \geqslant 0} C^k(\Omega)$
 · $C_c(\Omega) = \{v \in C(\Omega)$ tel que le $\mathrm{supp}(v) = K$ soit un compact$\}$
 $= \{v \in C(\Omega)$ tel que $v(x) = 0$ sur $\Omega \backslash K$, K compact dans $\Omega\}$
 · $C_c^k(\Omega) = C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega),\ k \geqslant 1$

Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^N$ et $0 < \alpha \leqslant 1$, on note
$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ v \in C(\overline{\Omega}),\ \sup\limits_{(x,y), x \neq y} \dfrac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty \right\}$
muni de la norme $\|v\|_{0,\alpha} = |v|_{C(\overline{\Omega})} + \sup\limits_{(x,y), x \neq y} \left\{ \dfrac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\}$.

- **Les espaces $L^p(\Omega)$**
$1 \leqslant p \leqslant \infty$. Si $1 \leqslant p < \infty$, on note

$$L^p(\Omega) = \left\{ v \,:\, \Omega \longrightarrow I\!R \text{ mesurable tel que } \int_\Omega |v(x)|^p\, dx < +\infty \right\}.$$

La norme est notée $|v|_p = \left[\int_\Omega |v(x)|^p\, dx \right]^{\frac{1}{p}}$.
Si $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \{ v \,:\, \Omega \longrightarrow I\!R \,\text{mesurable}, \exists M > 0 \text{ t.q. } |v(x)| \leqslant M \text{ p.p.}\}$$

la norme est notée $|.|_\infty$.
- **$L^{p,q}$ espace de Lorentz d'exposant p et q,**
$|\cdot|_{(p,q)}$ une norme dans l'espace de Lorentz,
$|\cdot|_{p,q}$ quantité équivalente à la norme $|\cdot|_{(p,q)}$.
- **$L^{(p'}$ petit espace de Lebesgue.**
La norme associée est pour $p' = \dfrac{p}{p-1}$

$$|g|_{(p'} = \operatorname*{Inf}_{g = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k \;\; g_k \geqslant 0} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \inf_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_\Omega g_k^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \right\},$$

où $(p-\varepsilon)'$ est le conjugé de $p - \varepsilon$.
- **Espace dual**
$\mathcal{D}'(\Omega) = \{L : \mathcal{D}(\Omega) \to I\!R,$ linéaire continue $\}=$ espace des distributions
$L^p(\Omega)' = L^{p'}(\Omega), \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1, \quad 1 \leqslant p < +\infty.$

- **Espaces de Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$
  Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on note l'espace de Sobolev :
  $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)$, tel que pour $i = 1, \cdots, N$, la dérivée distribution $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ coïncide avec une fonction g_i de $L^p(\Omega)\}$.

- **Fonctions à valeurs vectorielles**
  - Si p est fini on note
    $L^p(0,T;V) = \{u : [0,T] \longrightarrow V$, est une fonction mesurable t.q. la fonction $t \to |u(t)|^p$ soit Lebesgue intégrable$\}$,
    la norme étant $|u|^p_{L^p(0,T;V)} = \displaystyle\int_0^T |u(t)|^p\,dt$
  - Si p est infini, alors on note
    $L^\infty(0,T;V) = \{u : [0,T] \longrightarrow V$, t.q. l'application $t \to |u(t)|$ soit mesurable, $\sup\limits_{t\in[0,T]}\text{ess}\ |u(t)|$ soit fini$\}$.
    la norme étant $|u|_{L^\infty(0,T;V)} = \sup\limits_{t\in[0,T]}\text{ess}\ |u(t)|$.
  - $C^k([0,T];V) = \{v \in C^{k-1}([0,T];V)$ t.q $v^{(k)} \in C([0,T];V)\}$
  - $C^\infty([0,T];V) = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} C^k([0,T];V)$.
  - $\mathcal{D}'(0,T;V) = \{L : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow V,$ linéaire et continue $\}$.
    u' dérivée en temps, $u' \in \mathcal{D}'(0,T;V)$.
  - $W^{1,p}(0,T;V) = \{v \in L^p(0,T;V)$ t.q $v' \in L^p(0,T;V)\}$.
- $\{u > t\} = \{x : u(x) > t\}$, $\{u = t\} = \{x : u(x) = t\}$.
- $H_m(E)$ mesure de Hausdorf m-dimensionnelle de E.
- $u|_E$ restriction de la fonction u à l'ensemble E.
- α_m mesure de Lebesgue de la boule unité dans $I\!R^m$.
- $m_u(t) = |u > t| = m(t)$ fonction de distribution de u.
- u_* réarrangement décroissant de u.
- $u_{**}(t) = t^{-1}\displaystyle\int_0^t u_*(\sigma)d\sigma$.
- v_{*u} réarrangement relatif de v par rapport à u.
- $\partial G(u)$ sous-différentiel au point u d'une fonctionnelle G.
- M_u opérateur moyenne de 1^{ere} espèce.
- $M_{u,v}$ opérateur moyenne de 2^{nde} espèce.
- $P_\Omega(E)$ périmètre au sens de De Giorgi de E dans Ω.
- $P_{I\!R^N}(E)$ périmètre dans Ω relativement à un poids b de E.
- $Q(\Omega)$ ou Q constante relative isopérimétrique de Ω.
- ρ' norme associée d'une norme ρ.
- $V^1(\Omega,\rho) = \Big\{v \in W^{1,1}(\Omega) : \rho\left(|\nabla v|_{*v}\right) < +\infty\Big\}$.
- $W^1(\Omega,\rho) = \Big\{v \in W^{1,1}(\Omega) : \rho\left(|\nabla v|_{*}\right) < +\infty\Big\}$.

1

Motivations et généralités sur le réarrangement monotone

Pour montrer les inégalités de Sobolev, on peut utiliser la théorie de potentiel (potentiel de Riesz), qui est une manière d'utiliser les représentations intégrales, ou bien l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg,

$$\text{pour } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad |u|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \prod_{j=1}^{N} |\partial_j u|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}.$$

Les preuves sont souvent très techniques et s'adaptent difficilement aux espaces invariants par réarrangement.

L'outil que nous allons présenter dans ce livre est une extension de celui développé dans le livre de Mossino [82] et est avant tout un outil pratique pour faire des estimations concernant les fonctions d'une variable réelle u partant d'un domaine Ω (souvent ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$) dans $\mathbb{R}$ i.e. $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Un exemple de problème étudié avec cet outil est le suivant:
peut-on estimer (de façon explicite) la constante

$$\lambda_1^{\frac{1}{p}}(\Omega) = \operatorname*{Inf}_{u \in C_c^\infty(\Omega),\ u \neq 0} \frac{|\nabla u|_{L^p(\Omega)^N}}{|u|_{L^p(\Omega)}}, \qquad 1 \leqslant p < \infty \ ?$$

ou plus généralement, si $1 \leqslant p < N,\ p^*$ l'exposant de Sobolev associé, peut-on donner des estimations explicites de

$$\operatorname*{Inf}_{u \in C_c^\infty(\Omega),\ u \neq 0} \frac{|\nabla u|_{L^p(\Omega)^N}}{|u|_{L^{p^*}(\Omega)}} \ ?$$

Et si $p = N$ peut-on trouver un espace $X(\Omega)$ t.q.

$$X(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), X(\Omega) \subsetneqq W_{\cdot}^{1,N}(\Omega)?$$

et dans ce cas, peut-on donner une estimation de

$$\operatorname*{osc}_{B(x,r)\cap\Omega} u \text{ en fonction de } r \ (r \to 0),$$

$B(x,r)$ désignant la boule centrée en $x \in \Omega$, de rayon r.

L'espace $X(\Omega)$ est un espace "limite" des espaces de Sobolev classiques qui souvent ne s'exprime pas en terme d'espaces de Lebesgue, mais en utilisant des espaces liés au réarrangement comme les espaces de Lorentz ou les petits espaces de Lebesgue (voir Stein, Fiorenza-Rakotoson [62, 118]).

Le même outil que nous allons développer va nous permettre :

- De résoudre des problèmes d'optimisation non classique, telle que la minimisation suivante :

$$\operatorname{Inf}\ \left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_\Omega fv\,dx, \quad v \in K(h)\right\},\ \text{où } h \in L^\infty(\Omega)$$

et $K(h) =$

$$\left\{v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \Phi(v)dx \leqslant \int_\Omega \Phi(h)dx\ \ \forall \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ convexe lipschitzienne}\right\}.$$

- De trouver l'équation d'Euler associée à ce problème. On verra que l'ensemble des contraintes peut s'exprimer en terme de réarrangement monotone et l'obtention des équations d'Euler nécessite le réarrangement relatif.

Des équations aux dérivées partielles non locales vont être abordées comme applications de ces outils.

D'autres problèmes multicontraintes peuvent se reformuler en terme de réarrangement relatif et de réarrangement monotone, voir le chapitre 2.

1.1 Notations et rappels

Tout au long de ce livre, on désignera par :

$\mathbb{R}^N$ l'espace euclidien muni de la norme $|x| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{1/2}$ associée au produit scalaire $(x,y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ (avec $x = (x_1, \cdots, x_N),\ y = (y_1, \cdots, y_N)$), $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r.

Pour simplifier, on utilisera la mesure de Lebesgue et si E est mesurable dans $\mathbb{R}^N$, on note $|E|$ la mesure de E ou par abus le volume de E, Ω désignera l'ensemble (souvent borné) sur lequel on travaille.

La fonction caractéristique de E sera notée χ_E i.e. $\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$ La mesure de Haussdorf m-dimensionnelle de E sera quelquefois utilisée et sera notée $H_m(E)$. Notons que $H_N(E) = |E| \equiv \mathcal{L}_N(E)$.

En un mot, le réarrangement d'une fonction $u : \Omega \to I\!R$ est la fonction u_* inverse de la fonction volume suivant $t \to \text{vol}\Big\{u > t\Big\} = |u > t|$. C'est donc une fonction décroissante. Son intérêt principal se résume par la conservation du volume :

$$\text{vol}\Big\{u > t\Big\} = \text{vol}\Big\{u_* > t\Big\} \qquad (\forall\, t)$$

(volume d'ensemble de niveau). Ce qui implique la conservation de normes dans différents espaces normés.

Si $u : \Omega \to I\!R$ est une fonction mesurable, on notera simplement : $\Big\{u > t\Big\} = \Big\{x \in \Omega : u(x) > t\Big\}$, $\Big\{u = t\Big\} = \Big\{x \in \Omega : u(x) = t\Big\}$ de même pour les ensembles $\{u < t\}$, $\{u \leqslant t\}$, $\{u \geqslant t\}$. Leur mesure est notée $\Big|\Big\{u > t\Big\}\Big| = |u > t|$, de même pour $|u < t|$, $|u \geqslant t|$, $|u = t|$. Si $E \subset \Omega$ on note $v\big|_E$ la restriction de v à l'ensemble E.

On notera $L^p(\Omega)$ les espaces de Lebesgue classiques $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ munis de la norme $|\cdot|_p$.

Définition 1.1.1 (palier en une valeur t)**.**
Soit $t \in I\!R$, $u : \Omega \to I\!R$ mesurable.

On dira que *u a un palier au point t si $|u = t| > 0$.*

On appelle *plateaux de u l'ensemble $P(u) = \bigcup_{t \in D_u} \Big\{u = t\Big\}$ où D_u est l'ensemble des points où u a un palier.*

Proposition 1.1.1.
Soit $u : \Omega \to I\!R$ mesurable (Ω borné ou de mesure finie). Alors D_u (donné dans la définition précédente) est au plus dénombrable.

Preuve de la proposition.

Pour $n \in I\!N^*$, on pose $D_{u,n} = \left\{t \in D_u : |u = t| > \dfrac{1}{n}\right\}$.

Alors $D_u = \bigcup_{n \in I\!N^*} D_{u,n}$. Montrons que $D_{u,n}$ est au plus dénombrable. Si ce n'est pas le cas, alors $D_{u,n}$ est un ensemble infini non dénombrable et par l'axiome du choix, il existerait un sous-ensemble dénombrable $D'_{u,n} \subset D_{u,n}$. Alors

$$\frac{1}{n}\operatorname{card}(D'_{u,n}) \leqslant \sum_{t\in D'_{u,n}} |u=t| = \left|\bigcup_{t\in D'_{u,n}} \{x : u(x)=t\}\right| \leqslant |\Omega|$$

Ce qui est absurde. Par suite D_u lui-même est au plus dénombrable. □

Définition 1.1.2 (fonction de distribution)**.**
Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, $|\Omega| < +\infty$. On appelle fonction de distribution de u la fonction décroissante :

$$m_u = m : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \ \ \to m(t) \end{array} \ \textit{définie par } m(t) = m_u(t) = \text{mesure}\,\{u > t\}\,.$$

Définition 1.1.3 (réarrangement décroissant)**.**
Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, $|\Omega| < +\infty$. On appelle réarrangement décroissant de u, la fonction $u_* : \left]0, |\Omega|\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$u_*(s) = \text{Inf } \{t \in \mathbb{R},\ m(t) \leqslant s\}\,.$$

Si $s = 0,\ u_*(0) = \sup_{\Omega}\text{ess } u,\ s = |\Omega|\,,\ u_*(|\Omega|) = \inf_{\Omega}\text{ess } u.$

Propriété 1.1.1.
(a) m est continue à droite,
(b) $u_*\big(m(t)\big) \leqslant t \quad \forall\, t,$
(c) $m\left(u_*(s)\right) \leqslant s \quad \forall\, s,$
(d) u_* est continue à droite sur $\big[0, |\Omega|\big),$
(e) Si $u \leqslant v$ p.p. alors $u_*(s) \leqslant v_*(s)\ \forall\, s \in \overline{\Omega_*}$.

Preuve.

(a) Posons $E(h) = \{t < u \leqslant t + h\}$ alors $E(h_1) \subset E(h_2)$ si $h_1 \leqslant h_2$ et $\bigcap_{h>0} E(h) = \emptyset$: $\lim_{h\to 0} |E(h)| = 0$ soit $\lim_{h\to 0} m(t+h) = m(t)$.

(b) $u_*\big(m(t)\big) = \text{Inf } \{\theta : m(\theta) \leqslant m(t)\} \leqslant t$.

(c) Soit $s \in \Omega_*$, il existe $t_n \in \mathbb{R}$, t.q.

$$m(t_n) \leqslant s,\ t_n > u_*(s),\ t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_*(s).$$

Par continuité à droite, nous avons :

$$m(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} m\big(u_*(s)\big) : m\big(u_*(s)\big) = \lim_n m(t_n) \leqslant s.$$

Pour $s = |\Omega|\,,\ m(\inf_{\Omega}\text{ess } u) \leqslant |\Omega|\,,\ s = 0$ on a $m(\sup_{\Omega}\text{ess }) = 0.$

(d) Supposons qu'il existe $s \in \left[0, |\Omega|\right[$ t.q. $\lim\limits_{h \searrow 0} u_*(s+h) \neq u_*(s)$, alors il existe γ t.q. $u_*(s) > \gamma > u_*(s+h)$, $\forall\, h > 0$. D'où

$$m(\gamma) \leqslant m\big(u_*(s+h)\big) \leqslant s+h : m(\gamma) \leqslant s.$$

Par définition de u_*, $u_*(s) \leqslant \gamma$, contradiction.

(e) Si $u \leqslant v$ alors $m_u(t) \leqslant m_v(t)\ \forall\, t$, ce qui entraîne par définition $u_*(s) \leqslant v_*(s)$, $\forall\, s \in \Omega_*$ (par continuité à droite pour $s = 0$, par continuité à gauche pour $s = |\Omega|$).

□

Propriété 1.1.2 (fondamentale d'équimesurabilité)**.**
Pour tout réel t, on a :

1. $|u > t| = |u_* > t|$,
2. $|u \geqslant t| = |u_* \geqslant t|$, $\quad |u \leqslant t| = |u_* \leqslant t|$, $\quad |u = t| = |u_* = t|$.

Preuve. Il suffit de montrer le premier énoncé car :
$|u \leqslant t| = |\Omega| - |u > t| = |\Omega| - |u_* > t| = |u_* \leqslant t|$,

$$\lim_{h \searrow 0} |u > t-h| = \lim_{h \searrow 0} |u_* > t-h| \ \text{ implique } \ |u \geqslant t| = |u_* \geqslant t|.$$

Pour montrer (1.), posons $I(t) = \left\{\sigma \in \overline{\Omega_*}\ u_*(\sigma) > t\right\}^{\cdot}$ • Si $t \geqslant \sup\limits_{\Omega} \operatorname{ess} u$, alors $I(t) = \emptyset$: $\operatorname{mes}\big(I(t)\big) = |u > t| = 0$.
• Si $t < \sup\limits_{\Omega} \operatorname{ess} u$, alors $0 \in I(t)$ et comme u_* est décroissante $I(t)$ est un intervalle. D'où $I(t) = \Big[0, \operatorname{mes}\{u_* > t\}\Big)$. Comme $u_*\big(m(t)\big) \leqslant t$ alors $m(t) \notin I(t)$ donc $m(t) \geqslant \text{longueur}\big(I(t)\big) = |u_* > t|$.
Ainsi $\gamma = |u > t| \geqslant |u_* > t|$.

Soit $s > |u_* > t|$ alors $s \notin I(t)$ i.e. $u_*(s) \leqslant t$, $\ m(t) \leqslant m\big(u_*(s)\big) \leqslant s$, en faisant tendre s vers $|u_* > t|$ on a alors $|u > t| \leqslant |u_* > t|$. □

Corollaire 1.1.1.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne. Alors

$$\int_\Omega F(u)dx = \int_{\Omega_*} F(u_*)ds.$$

En particulier, $|u|_{L^p(\Omega)} = |u_*|_{L^p(\Omega_*)} \qquad 1 \leqslant p \leqslant +\infty.$

Preuve. • Si $F(t) = \chi_{(a,b)}(t)$, $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fonction caractéristique d'un intervalle, alors l'égalité est vraie.
• Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, comme $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{j \in D}]a_j, b_j[$, $]a_i, b_i[$ deux à deux disjoints, où D est au plus dénombrable on a

$$\int_\Omega \chi_{\mathcal{O}}(u)dx = \sum_{j\in D}\int_\Omega \chi_{]a_j,b_j[}(u)dx = \sum_{j\in D}\int_{\Omega_*}\chi_{]a_j,b_j[}(u_*)ds = \int_{\Omega_*}\chi_{\mathcal{O}}(u_*)ds.$$

• Si A est un fermé de $I\!R$, puisque $\chi_A = 1-\chi_{I\!R\backslash A}$ et $I\!R\backslash A = \mathcal{O}$ est un ouvert alors on a l'égalité. On note :

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ E \text{ borélien } : \int_\Omega \chi_E(u)dx = \int_{\Omega_*}\chi_E(u_*)ds \right\}.$$

On vérifie que $\mathcal{M}_1$ est une σ-algèbre contenant tous les ouverts (principe d'extension de Carathéodory) par suite elle contient la σ-algèbre borélienne.
• Si $F : I\!R \to I\!R_+$ est borélienne bornée alors il existe $(a_i^n)_{i\leqslant n}$ et $\{E_i\}_{i\leqslant n}$ avec $F_n(\sigma) = \displaystyle\sum_{i=0}^n a_i^n \chi_{E_i}(\sigma)$ étagée, E_i borélienne et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(\sigma) = F(\sigma)\ \forall\,\sigma\in I\!R$, F_n est uniformément bornée en n. Alors, par le théorème de la convergence dominée on a:

$$\int_\Omega F_n(u)dx = \int_{\Omega_*}F_n(u_*)ds \Longrightarrow \int_\Omega F(u)dx = \int_\Omega F(u_*)ds.$$

• Si F est borélienne non bornée, alors on considère la suite de fonctions : $T_k(\sigma) = \begin{cases}\sigma & |\sigma|\leqslant k\\ k\,\mathrm{sign}(\sigma) & \text{sinon,}\end{cases}$
$F_k(\sigma) = T_k\circ F(\sigma)$ vérifie $0\leqslant F_k(\sigma)\leqslant F_{k+1}(\sigma)\leqslant F(\sigma)$ alors

$$\int_\Omega F_k(u) = \int_{\Omega_*}F_k(u_*)ds \underset{k\to+\infty}{\overset{\text{(Beppo-Lévi)}}{\Longrightarrow}} \int_\Omega F(u) = \int_{\Omega_*}F(u_*).$$

□

N.B. On peut remplacer les mesures de Lebesgue par la mesure pondérée $|E|_a = \displaystyle\int_E a(x)dx$ si $a>0,\ a\in L^1(\Omega)$ et définir le réarrangement décroissant u_*^a associé à u (voir exercice 10.1.4, chapitre 10, ou les articles Rakotoson-Simon [104, 105], Mercaldo A. [80], Brock F. et al. [26]).

Lemme 1.1.1.
Soit $\psi : I\!R \to I\!R$ croissante. Alors, pour tout u mesurable $(\psi\circ u)_* = \psi(u_*)$.

Preuve. Par équimesurabilité, on a :

$$|\psi\circ u > t| = \int_\Omega \chi_{]t,+\infty[}(\psi\circ u)du = \int_{\Omega_*}\left(\chi_{]t,+\infty[}\circ\psi\right)(u_*)ds = |\psi\circ u_* > t|\,.$$

Ce qui signifie que $(\psi\circ u)_* = (\psi\circ u_*)_*$. Posons $f=\psi\circ u_*$, alors f est décroissante. Si $s\in\Omega_*$ alors l'intervalle $\{f>f(s)\}$ ne contient pas s mais contient 0 s'il est non vide donc on a toujours $|f>f(s)|\leqslant s$, ainsi $f_*(s)\leqslant f(s)$

(par définition). Comme pour tout k : $\displaystyle\int_{\Omega_*} T_k\big(f(s)\big)ds = \int_{\Omega_*} T_k\big(f_*(s)\big)ds$ et que $T_k\left(f_*(s)\right) \leqslant T_k\left(f(s)\right)$ on a :

$$\forall\, k : T_k\left(f_*(s)\right) = T_k\left(f(s)\right) \text{ p.p. en s.} \Longrightarrow f_*(s) = f(s)$$

p.p. d'où $(\psi \circ u)_* = (\psi \circ u_*)_* = \psi \circ u_*$ □

1.2 Les inégalités de Hardy-Littlewood

On aura besoin du lemme de Lyapounov suivant :

Lemme 1.2.1 (de Lyapounov)**.**
Soit $s \in \Omega_*$ t.q. il existe $t \in I\!R$, $|u > t| \leqslant s \leqslant |u \geqslant t|$.
Alors il existe un ensemble E mesurable t.q. :
$$\begin{cases} \bullet\, \{u > t\} \subset E \subset \{u \geqslant t\}, \\ \bullet\, |E| = s. \end{cases}$$

Preuve. Soit P un polynôme (exemple $P(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = |x|^2$) et v la restriction de P à $\{u \geqslant t\} \setminus \{u > t\} = \{u = t\}$ (notons que si $|u = t| = 0$, $s = |u > t|$, $E = \{u > t\}$). Considérons

$$E = \{x \in \Omega : u(x) > t\} \cup \{x : u(x) = t,\ v(x) > v_*(s - |u > t|)\}.$$

Comme v est sans palier, alors

$$|E| = |u > t| + |v_* > v_*\left(s - |u > t|\right)| = s.$$

□

Lemme 1.2.2 (1ère inégalité de Hardy-Littlewood)**.**
Soit $E \subset \Omega$ mesurable, $u : \Omega \to I\!R$ mesurable $\geqslant 0$ ou intégrable. Alors,

$$\int_E u(x)dx \leqslant \int_0^{|E|} u_*(s)ds.$$

De même on a $\displaystyle\int_E u(x)a(x)dx \leqslant \int_0^{|E|_a} u_*^a(s)ds$, pour $a > 0,\ a \in L^1(\Omega)$.
Si E vérifie $\{u > t_0\} \subset E \subset \{u \geqslant t_0\}$, alors on a l'égalité.

Preuve. Soit $v = u|_E$ restriction de u à E. Alors par équimesurabilité, on déduit :

$$\int_E u(x)dx = \int_0^{|E|} v_*(\sigma)d\sigma.$$

(Ce qui est vrai si $u \geqslant 0$ ou $u \in L^1(E)$). Mais $m_v(t) \leqslant m_u(t)$ alors $v_*(s) \leqslant u_*(s),\ s \leqslant |E|$.

D'où l'inégalité.

Si $\{u > t_0\} \subset E \subset \{u \geqslant t_0\}$, alors on a :

$$\int_E u\,dx = \int_{E\setminus\{u>t_0\}} u\,dx + \int_{\{u>t_0\}} u\,dx = t_0\,|E\setminus\{u>t_0\}| + \int_{u_*>t_0} u_* ds$$

$$\int_0^{|E|} u_* d\sigma = \int_0^{|u>t_0|} u_* d\sigma + \int_{|u>t_0|}^{|E|} u_* d\sigma \leqslant \int_{u_*>t_0} u_* d\sigma\ + t_0\Big[\,|E|\setminus|u>t_0|\,\Big],$$

en effet $\sigma > m(t_0) \Longrightarrow u_*(\sigma) \leqslant u_*\left(m(t_0)\right) \leqslant t_0$.

$$\int_0^{|E|} u_* d\sigma \leqslant \int_E u\,dx.$$

Autre preuve. Montrons que $u_*(\sigma) = v_*(\sigma)$ si $\sigma < |E|$.
Soit $\sigma \in [0, |E|\,[$ et $t \in I\!R$,
si $t < t_0$, $\quad m_u(t) \geqslant |E| > \sigma$,
si $t \geqslant t_0$, $\quad m_u(t) = m_v(t)$ $(\{x \in \Omega : u(x) > t\} = \{x \in E : u(x) > t\})$.
Alors $u_*(\sigma) = \mathrm{Inf}\ \{t \geqslant t_0 : m_u(t) \leqslant \sigma\} = v_*(\sigma)$. □

Corollaire 1.2.1 (de la 1ère inégalité)**.**

(a) Pour tout $s \in \overline{\Omega_*}$ si $u \geqslant 0$ mesurable ou u intégrable :

$$\int_0^s u_*(\sigma)d\sigma = \mathrm{Max}\ \left\{\int_E u(x)dx, \quad |E| = s\right\}.$$

(b) Si $u \geqslant 0$, $\quad \displaystyle\int_0^s u_*(\sigma)d\sigma = \mathrm{Max}\ \left\{\int_E u(x)dx, \quad |E| \leqslant s\right\}.$

Preuve.

(a) Si $|u = u_*(s)| = 0$, alors $E = \{u > u_*(s)\}$ vérifie

$$\int_{\{u>u_*(s)\}} u(x)dx = \int_{\{u_*>u_*(s)\}} u_*(\sigma)d\sigma.$$

Si $|u = u_*(s)| > 0$, alors $|u > u_*(s)| \leqslant s \leqslant |u \geqslant u_*(s)|$, il existe $E \subset \Omega$ mesurable t.q. $\{u > u_*(s)\} \subset E \subset \{u \geqslant u_*(s)\}$ et $|E| = s$. D'après le lemme précédent, on déduit que :

$$\int_E u(x)dx = \int_0^{|E|} u_*(\sigma)d\sigma.$$

(b) Si $u \geqslant 0$, alors on a :

$$\int_0^s u_*(\sigma)d\sigma = \text{Max}\left\{\int_E u(x)dx, \quad |E| = s\right\}$$

et

$$\text{Max}\left\{\int_0^{|E|} u_*(\sigma)d\sigma, \quad |E| \leqslant s\right\} \leqslant \int_0^s u_*(\sigma)d\sigma.$$

□

Corollaire 1.2.2.
Sous les mêmes conditions que le lemme 1.2.2 :

$$\int_0^s u_*(\sigma)d\sigma = \text{Max}\left\{\int_\Omega u(x)z(x)dx,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ \int_\Omega z(x)dx = s\right\}$$

$\forall\, s \in \overline{\Omega_*}$.

Preuve. Soient $0 \leqslant z \leqslant 1,\ \displaystyle\int_\Omega z(x)dx = s > 0$

$$\int_\Omega u(x)z(x)dx = \int_{\{z>0\}} u(x)z(x)dx = \int_0^{|z>0|_z} u_*^z(\sigma)d\sigma$$

(où u_*^z est le réarrangement décroissant par rapport à la mesure $z(x)dx$ sur $\{z > 0\}$, $|z > 0|_z = \displaystyle\int_{\{z>0\}} z(x)dx = s$.)
Or, $0 \leqslant z \leqslant 1 \Longrightarrow u_*^z(\sigma) \leqslant u_*(\sigma)$, d'où

$$\int_\Omega u(x)z(x)dx \leqslant \int_0^s u_*(\sigma)d\sigma.$$

Comme
$$\text{Max}\left\{\int_E u(x)dx,\ |E| = s\right\}$$
$$\leqslant \text{Max}\left\{\int_\Omega u(x)z(x)dx,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ \int_\Omega z(x)dx = s\right\}$$

on déduit le résultat.
Voir chapitre 10 (exercice 10.1.20) pour une autre preuve de ce corollaire. □

Proposition 1.2.1.
Soit $u : \Omega \to I\!R$ intégrable. Pour tout $s \in \overline{\Omega_*}$, posons :
$F(u) = \min\limits_{t\in I\!R}\left\{ts + \displaystyle\int_\Omega (u-t)_+dx\right\}$. *Alors*

$$F(u) = \int_0^s u_*(\sigma)d\sigma.$$

Preuve. Posons $F(t,u) = ts + \int_\Omega (u-t)_+ dx,\ t \in I\!R$. Alors,

$$\begin{aligned} F(t,u) &= ts + \int_\Omega (u-t)_+(\sigma) d\sigma \\ &= ts + \int_0^{|u \geqslant t|} (u_* - t)(\sigma) d\sigma \\ &= ts + \int_0^s (u_* - t)(\sigma) d\sigma + \int_s^{|u \geqslant t|} (u_* - t)(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^s u_*(\sigma) d\sigma + \int_s^{|u \geqslant t|} (u_* - t)(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\int_s^{|u \geqslant t|} (u_* - t)(\sigma) d\sigma \geqslant 0.$$

En effet :

- Si $t \leqslant u_*(s)$ alors $|u_* \geqslant t| \geqslant |u_* \geqslant u_*(s)| \geqslant s$

et Si $\sigma < |u \geqslant t|$ alors $u_*(\sigma) - t \geqslant 0$: $\displaystyle\int_s^{|u \geqslant t|} (u_*(\sigma) - t)\, d\sigma \geqslant 0$;

- Si $t > u_*(s)$ alors $|u \geqslant t| \leqslant |u > u_*(s)| \leqslant s$

et si $\sigma > |u \geqslant t|$ alors $u_*(\sigma) - t < 0$. Par suite, l'intégrale est positive;

- Si $t = u_*(s)$, sur $(s, |u \geqslant u_*(s)|)$ la fonction $u_* = u_*(s)$ alors

$$F(u_*(s), u) = \int_0^s u_*(\sigma) d\sigma.$$

D'où

$$\int_0^s u_*(\sigma) d\sigma \leqslant \operatorname*{Min}_t\ F(t,u) = F(u) \leqslant F(u_*(s), u) = \int_0^s u_*(\sigma) d\sigma.$$

$\square$

Corollaire 1.2.3 (de la proposition 1.2.1)**.**
Soient u, v deux fonctions intégrables. Alors, on a l'équivalence suivante :

$$[A] \begin{cases} \displaystyle\int_0^s u_*(\sigma) d\sigma \leqslant \int_0^s v_*(\sigma) d\sigma,\ \forall\, s \in \overline{\Omega_*}, \\ \\ \displaystyle\int_\Omega u dx = \int_\Omega v dx, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow [B] \begin{cases} \forall\, \Phi : I\!R \to I\!R \text{ convexe et lipschitzienne}, \\ \displaystyle\int_\Omega \Phi(u) dx \leqslant \int_\Omega \Phi(v) dx. \end{cases}$$

Preuve.
Montrons que [B] implique [A]. En effet, pour tout $t \in I\!R$, $\Phi(\sigma) = (\sigma - t)_+$ est convexe lipschitzienne. Par suite,

$$\int_\Omega (u-t)_+ dx \leqslant \int_\Omega (v-t)_+ dx.$$

Par la proposition précédente on conclut que

$$\int_0^s u_*(\sigma) d\sigma \leqslant \int_0^s v_*(\sigma)\ \forall\, s \in [0, |\Omega|].$$

En considérant $\Phi(t) = -t$, on déduit $\displaystyle\int_\Omega u(x)dx \geqslant \int_\Omega v(x)dx$ d'où [A].
Réciproquement si Φ est convexe et lipschitzienne alors Φ' est une fonction croissante bornée. Par convexité

$$\big(v_*(\sigma) - u_*(\sigma)\big)\Phi'\big(u_*(\sigma)\big) \leqslant \Phi\big(v_*(\sigma)\big) - \Phi\big(u_*(\sigma)\big) \qquad \forall\, \sigma \in \Omega_*.$$

D'où

$$\int_{\Omega_*} (v_* - u_*)\, \Phi'(u_*) d\sigma \leqslant \int_\Omega \Phi(v)dx - \int_\Omega \Phi(u)dx.$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_*} (v_* - u_*)\, \Phi'(u_*) d\sigma &= \int_{\Omega_*} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma (v_* - u_*)\, dt \Phi'(u_*) d\sigma \\ &= - \int_{\Omega_*} \left(\int_0^\sigma (v_* - u_*)\, dt \right) d\Phi'(u_*)\end{aligned}$$

(sachant que $\displaystyle\int_0^{|\Omega|} (v_* - u_*)\, dt = 0$).
Puisque $-d\Phi'(u_*) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^\sigma (v_* - u_*)\, dt \geqslant 0$, on déduit

$$\int_\Omega \Phi(v)dx - \int_\Omega \Phi(u)dx \geqslant \int_{\Omega_*} (v_* - u_*)\, \Phi'(u_*) d\sigma \geqslant 0.$$

□

Théorème 1.2.1 (2ème inégalité de Hardy-Littlewood).
Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. *Alors*

$$\int_\Omega f(x) g(x) dx \leqslant \int_{\Omega_*} f_*(\sigma) g_*(\sigma) d\sigma.$$

On a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.2.3 (de Fubini).
Soient $f \in L^p(\Omega),\ f \geqslant a > -\infty,\ g \in L^{p'}(\Omega)$ *alors*

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx = a\int_\Omega g(x)dx + \int_a^{+\infty} dt \int_{f>t} g(x)dx.$$

Preuve. Comme $f(x) - a = \displaystyle\int_a^{f(x)} dt = \int_a^{+\infty} \chi_{]a,f(x)[}(t)dt$ alors, par le Théorème de Fubini-Tonelli classique

$$\int_\Omega (f(x) - a)\, g(x)dx = \int_a^{+\infty} dt \int_\Omega g(x)\chi_{]a,f(x)[}(t)dx$$

$$= \int_a^{+\infty} dt \int_\Omega g(x)\chi_{\{f>t\}}(x)dx = \int_a^{+\infty} dt \int_{\{f>t\}} g(x)dx.$$

□

Preuve du théorème.
Commençons par le cas où $f \in L^\infty(\Omega)$, $a = \inf\operatorname{ess}_\Omega f > -\infty$. Par équimesurabilité et le premier lemme de Hardy-Littlewood :

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leqslant a\int_{\Omega_*} g_* d\sigma + \int_a^{+\infty} dt \int_{\{f_*>t\}} g_*(\sigma)d\sigma = \int_{\Omega_*} f_* g_*,$$

si $f \in L^p(\Omega)$, alors $T_k(f) \in L^\infty(\Omega)$, $T_k(f)_* = T_k(f_*)$ et $\displaystyle\int_\Omega T_k(f)g(x)dx \leqslant \int_\Omega T_k(f_*)g_* d\sigma$. Quand $k \to +\infty$ par le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\int_\Omega fg dx \leqslant \int_{\Omega_*} f_* g_* d\sigma.$$

□

1.3 Etude de la continuité de $u \to u_*$

Commençons par quelques remarques qui sont des conséquences des résultats qu'on a vus ci-dessus.

Proposition 1.3.1.
Si $u,\ v$ *sont dans* $L^\infty(\Omega)$ *alors*

$$|u_*(\sigma) - v_*(\sigma)| \leqslant |u - v|_\infty \qquad \forall\, \sigma \in \Omega_*.$$

Preuve. Notons tout d'abord que $(u+c)_* = u_* + c$ (c = constante) (en choisissant $\psi(t) = t+c$ dans le lemme 1.1.1). Comme, $|u(x) - v(x)| \leqslant |u-v|_\infty$ alors

$$v(x) - |u-v|_\infty \leqslant u(x) \leqslant v(x) + |u-v|_\infty \ p.p..$$

D'où

$$v_*(\sigma) - |u-v|_\infty \leqslant u_*(\sigma) \leqslant v_*(\sigma) + |u-v|_\infty \qquad \forall\, \sigma.$$

□

Proposition 1.3.2.
Soient $u,\ v \in L^2(\Omega)$, alors

$$|u_* - v_*|_{L^2(\Omega)} \leqslant |u-v|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Preuve. $|u_* - v_*|^2_{L^2(\Omega_*)} = \int_{\Omega_*} u_*^2 d\sigma + \int_{\Omega*} v_*^2 - 2d\sigma \int_{\Omega*} u_* v_* d\sigma.$

Comme $\int_{\Omega_*} u_* v_* \geqslant \int_\Omega uv$ par équimesurabilité on a :

$$|u_* - v_*|^2_{L^2(\Omega_*)} \leqslant \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega v^2 dx - 2\int_\Omega uvdx = |u-v|^2_{L^2}\,.$$

Proposition 1.3.3.
Soient $u,\ v \in L^1(\Omega)$, alors $|u_* - v_*|_{L^1} \leqslant |u-v|_{L^1}$.

Preuve. Suivant les idées de Crandall et Tartar [37], on a :

$$\min(u,v)(x) = \frac{u(x) + v(x) - |u(x) - v(x)|}{2} \leqslant (u(x) \ et \ v(x))\,.$$

D'où

$$\min(u,v)_* \leqslant \min(u_*, v_*) = \frac{u_* + v_* - |u_* - v_*|}{2}.$$

Par équimesurabilité, on a :

$$\int_\Omega \left[(u+v) - |u-v|\right](x)dx \leqslant \int_{\Omega_*} \left[(u_* + v_*) - |u_* - v_*|\right] d\sigma.$$

Ainsi on a :

$$\int_\Omega |u-v|\,(x)dx \geqslant \int_{\Omega_*} |u_* - v_*|\, d\sigma.$$

□

Corollaire 1.3.1.
Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'application $u \in L^p(\Omega) \to u_* \in L^p(\Omega)$ est (fortement) continue.

On montre même que c'est une application contractante.

Théorème 1.3.1 (propriété de contraction)**.**
Soient ρ une fonction convexe de $I\!R$ dans $I\!R$, u et v deux fonctions mesurables t.q. $v \in L^\infty(\Omega)$ alors

$$\int_{\Omega_*} \rho\left((u+v)_* - u_*\right) d\sigma \leqslant \int_\Omega \rho(v)dx. \tag{1.1}$$

En particulier si $u \in L^\infty(\Omega)$ alors :

$$\int_{\Omega_*} \rho\left(v_* - u_*\right) d\sigma \leqslant \int_\Omega \rho(v-u)dx. \tag{1.2}$$

Corollaire 1.3.2.
On suppose de plus que ρ satisfait à la condition de croissance suivante : $\exists \alpha > 0,\ \beta > 0$: t.q.

$$\forall\, t \in I\!R, \quad |\rho(t)| \leqslant \alpha\, |t|^p + \beta \qquad \textit{pour } 1 \leqslant p < +\infty.$$

Alors $\forall\,(u,v) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega_*} \rho(u_* - v_*)d\sigma \leqslant \int_\Omega \rho(u-v)dx.$$

En particulier l'application $u \in L^p(\Omega) \to u_* \in L^p(\Omega_*)$ est un contraction.

Preuve du théorème.
1er cas : $u \in L^\infty(\Omega)$, $\rho \in C^2(I\!R)$.
On pose $\gamma = \min\left(-|u|_\infty, -|u+v|_\infty\right)$ alors p.p. en x

$$-\int_\gamma^{u(x)} \int_\gamma^{u(x)+v(x)} \rho''(t-s)dtds = -\int_\gamma^{u(x)} \Big[\rho'\left(u(x)+v(x)-s\right) - \rho'(\gamma - s)\Big]ds$$
$$= -\rho\big(\gamma - u(x)\big) + \rho(0) + \rho\big(v(x)\big) - \rho\big(u(x)+v(x)-\gamma\big)$$

ainsi

$$\rho\left(v(x)\right) = -\int_\gamma^{u(x)}\int_\gamma^{u(x)+v(x)} \rho''(t-s)dtds + \rho\big(\gamma - u(x)\big) - \rho(0) + \rho\big(u(x)+v(x)-\gamma\big).$$

En reprenant cette preuve, on a l'identité : $\rho(\alpha - \beta)$
$$= -\int_\gamma^{+\infty}\int_\gamma^{+\infty} \rho''(t-s)\, H(\beta - s)\, H(\alpha - t)dsdt + \rho(\gamma-\beta) - \rho(0) + \rho(\alpha - \gamma)$$

si α et $\beta \geqslant \gamma$, si on introduit la fonction de Heaviside $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
On intègre la fonction $\rho(v)$ sur Ω et on utilise l'équimesurabilité :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho\left(v(x)\right) dx \\ &= -\int_\gamma^{+\infty} \int_\gamma^{+\infty} \rho''(t-s) \int_\Omega H\left(u(x)-s\right) \cdot H\left(u(x)+v(x)-t\right) dx ds dt \\ &\quad + \int_{\Omega_*} \rho\left(\gamma - u_*(s)\right) ds - \rho(0)\left|\Omega\right| + \int_{\Omega_*} \rho\left[(u+v)_*(s) - \gamma\right] ds. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Par l'inégalité de Hardy-Littlewood, on a :

$$\int_\Omega H\left(u(x)-s\right) H\left((u+v)(x)-t\right) dx \leqslant \int_{\Omega_*} H(u-s)_* H\left((u+v)-t\right)_* d\sigma. \tag{1.4}$$

Mais $\sigma \to H(\sigma - t)$ est croissante, ainsi $H\left(u(t)-s\right)_* = H(u_* - s)$, $H\left((u+v)-t\right)_* = H\left((u+v)_* - t\right)$. Puisque ρ est convexe, $-\rho'' \leqslant 0$, on obtient des relations (1.3), (1.4) l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho\left(v(x)\right) dx \geqslant &-\int_\gamma^{+\infty} \int_\gamma^{+\infty} \rho''(t-s) \int_{\Omega_*} H(u_*(\sigma)-s) H\left((u+v)_*(\sigma)-t\right) d\sigma dt ds \\ &+ \int_{\Omega_*} \rho\left(\gamma - u_*(\sigma)\right) d\sigma + \int_{\Omega_*} \rho\left((u+v)_*(\sigma) - \gamma\right) d\sigma - \rho(0)\left|\Omega\right| \end{aligned} \tag{1.5}$$

Un calcul similaire à celui fait précédemment (ou l'identité précédente) montre que le membre de droite de la relation (1.5) n'est autre que

$\int_{\Omega_*} \rho\left((u+v)_* - u_*\right)(\sigma) d\sigma$:

$$\int_{\Omega_*} \rho\left((u+v)_* - u_*\right)(\sigma) d\sigma \leqslant \int_\Omega \rho(v)(x) dx$$

2ème cas : $\rho \in C^2$, u **mesurable.**
Soit la fonction :

$$T_n(\sigma) = \left[n - (n - |\sigma|)_+\right] \operatorname{sign}(\sigma)$$

alors $T_n(u) \in L^\infty$ et $T_n(u)_* = T_n(u_*)$ p.p. et

$$\int_{\Omega_*} \rho\left(T_n(u+v)_* - T_n(u_*)\right) \leqslant \int_\Omega \rho\left(T_n(u+v) - T_n(u)\right).$$