

Michael Schröder (Hrsg.)

# Finanzmarkt- Ökonometrie

Basistechniken

Fortgeschrittene Verfahren

Prognosemodelle

2. Auflage





Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser,  
vielen Dank, dass Sie dieses E-Book erworben haben. Damit Sie das Produkt optimal nutzen können, möchten wir Sie gerne auf folgende Navigationsmöglichkeiten hinweisen:

Die Verlinkungen im Text ermöglichen Ihnen eine schnelle und komfortable Handhabung des E-Books. Um eine gewünschte Textstelle aufzurufen, stehen Ihnen im Inhaltsverzeichnis und im Register als Link gekennzeichnete Kapitelüberschriften bzw. Seitenangaben zur Verfügung.

Zudem können Sie über das Adobe-Digital-Editions-Menü »Inhaltsverzeichnis« die verlinkten Überschriften direkt ansteuern.

Erfolgreiches Arbeiten wünscht Ihnen  
der Schäffer-Poeschel Verlag

Ergänzende Unterlagen zum Buch bieten wir Ihnen unter **[www.schaeffer-poeschel.de/webcode](http://www.schaeffer-poeschel.de/webcode)** zum Download an. Für den Zugriff auf die Daten fordern Sie bitte mit Ihrer E-Mail-Adresse und dem nachfolgenden Webcode Ihr persönliches Passwort an. Bitte achten Sie bei der Eingabe des Webcodes auf eine korrekte Groß- und Kleinschreibung.

Webcode **6350-AJ5yx**

---

Michael Schröder (Hrsg.)

# Finanzmarkt-Ökonometrie

Basistechniken, Fortgeschrittene Verfahren, Prognosemodelle

2., überarbeitete Auflage

2012

Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

e-Book ISBN 978-3-7992-6350-4

Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© 2012 Schäffer-Poeschel Verlag für Wirtschaft · Steuern · Recht GmbH  
[www.schaeffer-poeschel.de](http://www.schaeffer-poeschel.de)  
[info@schaeffer-poeschel.de](mailto:info@schaeffer-poeschel.de)

Einbandgestaltung: Willy Löffelhardt/Melanie Frasch  
Satz: Claudia Wild, Konstanz

Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart  
Ein Tochterunternehmen der Verlagsgruppe Handelsblatt

---

## Vorwort zur zweiten Auflage

Ökonometrische Anwendungen im Bereich der Finanzmarktanalyse haben eine lange Tradition in Forschung und Praxis. Frühe Beispiele hierfür sind ökonometrische Tests des Capital Asset Pricing Modells (CAPM) und der Arbitrage Pricing Theorie (APT). Neuere Entwicklungen beziehen sich etwa auf Weiterentwicklungen bei Faktormodellen, vielfältige Anwendungen der Kointegrationsanalyse auf Finanzmarktdaten, die Prognose von Kreditausfallwahrscheinlichkeiten und die Modellierung stochastischer Volatilität. Inzwischen hat sich für die ökonometrischen Methoden zur Finanzmarktanalyse der Begriff »Finanzmarkt-Ökonometrie« eingebürgert. Finanzmarkt-Ökonometrie umfasst alle Schätz- und Testverfahren, die für spezielle Fragestellungen der empirischen Finanzmarktanalyse entwickelt wurden. Einen guten Überblick zu den wichtigsten finanzökonomischen Anwendungsgebieten geben Campbell, Lo und MacKinlay (1997).

Ziel dieses Buches ist es, einen Überblick über alle wichtigen ökonometrischen Methoden zu geben, die bei der empirischen Analyse von Kapitalmarktdaten eingesetzt werden. Das Buch bietet daher nicht nur eine Darstellung der Finanzmarkt-Ökonometrie im engeren Sinne, sondern zusätzlich auch eine Einführung in grundlegende Verfahren der Regressionsanalyse und der Zeitreihenmethodik.

In allen Kapiteln werden die ökonometrischen Methoden so dargestellt, dass ein unmittelbarer Anwendungsbezug gegeben ist. Besonderer Wert wird darauf gelegt, Hinweise für die praktische Umsetzung der Schätz- und Testverfahren zu geben. Unterstützt wird dies durch zahlreiche Beispiele, mit denen die Durchführung der Methoden demonstriert wird. Der anwendungsorientierte Bezug des Buches führt dazu, dass theoretische Beweise und Herleitungen von Formeln nur selten herangezogen werden. Auch die theoretischen Grundlagen der Statistik und Ökonometrie werden nur relativ kurz behandelt. Hierfür stehen jedoch eine große Anzahl von Lehrbüchern wie z. B. Greene (2011), Hayashi (2000) und Johnston und DiNardo (1997) zur Verfügung. Ausführliche Literaturhinweise weisen am Ende jedes Kapitels den Weg zu weiterführenden und vertiefenden Publikationen, die insbesondere für die Lösung von Spezialproblemen nützlich sind.

In der vorliegenden zweiten Auflage von »Finanzmarkt-Ökonometrie« werden die wichtigsten Methoden und Vorgehensweisen beschrieben, die bei der empirischen Modellierung von Finanzmarktzeitreihen und der Erstellung von Prognosemodellen Anwendung finden. Alle Kapitel wurden grundlegend überarbeitet. Dies betrifft vor allem wichtige Weiterentwicklungen der Methoden, die konsequente Ausrichtung der Anwendungen auf EViews (Version 7), neue Anwendungsbeispiele sowie natürlich die Beseitigung von Fehlern, die in der ersten Auflage enthalten waren. Völlig neu geschrieben wurde Kapitel V »Nichtstationarität und Kointegration«.

Im Einzelnen werden in den Kapiteln I bis VIII die folgenden Themen behandelt:

Kapitel I beschreibt besondere Eigenschaften von Finanzmarkt-Zeitreihen wie z. B. Abweichungen von der Normalverteilung und stellt statistische Tests zu deren Überprüfung dar. Außerdem werden ausführliche Hinweise zur korrekten Behandlung von Finanzmarkt-Zeitreihen in ökonometrischen Modellen gegeben.

Die Methoden der Regressionsanalyse und Tests zur Überprüfung der Parameterschätzungen sowie der Modellstruktur werden in Kapitel II dargestellt. Anhand von praktischen Beispielen wird die Interpretation der Schätzergebnisse demonstriert. Ausführlich wird darauf eingegangen, welche Folgen daraus resultieren, wenn die Voraussetzungen des

Kleinste-Quadrate Schätzverfahrens nicht gegeben sind und wie der Anwender darauf reagieren kann. Dieses Kapitel gibt somit eine umfassende Einführung in Methodik und Praxis der Regressionsanalyse.

Die Verfahren der univariaten Zeitreihenanalyse stehen im Mittelpunkt von Kapitel III. Im Gegensatz zu strukturellen ökonomischen Modellen geht es hier um die Modellierung der dynamischen Eigenschaften von Finanzmarkt-Zeitreihen. Die Identifikation der geeigneten Modellansätze und die Interpretation der Schätzergebnisse werden detailliert dargestellt.

Kapitel IV befasst sich mit Vektor-Autoregressiven (VAR)-Modellen. Diese Modellklasse stellt eine Art Synthese zwischen strukturellen ökonomischen Modellen und Zeitreihenansätzen dar. VAR-Modelle eignen sich besonders gut für die Erstellung von Prognosemodellen, da sowohl die eigentlichen Zielvariablen als auch die sie beeinflussenden Variablen in einem Modell gemeinsam prognostiziert werden können. Ausführlich beschrieben wird die Erstellung von VAR-Modellen, die Interpretation der Schätzergebnisse und die Durchführung von Prognosen.

Viele Finanzmarkt-Zeitreihen sind nicht-stationär. Daher ist die Behandlung nicht-stationärer Zeitreihen in ökonometrischen Modellen ein besonders wichtiges Thema. In Kapitel V werden zunächst Testverfahren zur Überprüfung der Stationaritäts-Eigenschaften von Zeitreihen beschrieben. Falls Zeitreihen nicht-stationär sind, könnten so genannte Kointegrationsbeziehungen zwischen den Zeitreihen vorliegen. Kointegrationsbeziehungen stellen ökonomisch gesehen langfristige Gleichgewichtsbeziehungen dar, deren Berücksichtigung häufig zu einer Verbesserung von insbesondere längerfristigen Prognosen führt. Methodisch gesehen stellen die resultierenden Vektor-Error-Correction (VEC)-Modelle eine spezielle Klasse der VAR-Modelle dar.

Häufig weist die Varianz von Finanzmarkt-Zeitreihen zeitliche Regelmäßigkeiten auf. In Kapitel VI steht die ökonometrische Modellierung von stochastischen und deterministischen Volatilitätsprozessen im Mittelpunkt. Das Kapitel bietet eine umfassende Einführung in die Schätzung von ARCH-Modellen und zeigt, wie sich insbesondere mit nicht-linearen asymmetrischen ARCH-Modellen Verbesserungen bei der Optionsbewertung erzielen lassen.

In Kapitel VII werden ökonometrische Verfahren zur Analyse und Prognose von Kreditausfallwahrscheinlichkeiten dargestellt. Das Kapitel beschreibt die Schätzung und Interpretation von binären und geordneten Logit- und Probitmodellen und demonstriert an Hand konkreter Beispiele die Vorgehensweise bei der Modellerstellung. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln werden hier nicht Zeitreihen, sondern Querschnittsdaten analysiert. Die Anwendungen in diesem Kapitel werden mit der Statistik-Software STATA durchgeführt.

In Kapitel VIII wird ausführlich auf die Vorgehensweise bei der Erstellung von Prognosemodellen eingegangen. Ausgangspunkt sind die in den voran gehenden Kapiteln beschriebenen ökonometrischen Schätzverfahren und Modellstrukturen. Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht die praktische Vorgehensweise bei der Konstruktion von Prognosemodellen, die Diagnose der Modelleigenschaften wie z. B. die Überprüfung der Stabilität des Modells sowie die Bewertung der Prognosegüte. An Hand zahlreicher Beispielm Modelle werden die konkrete Vorgehensweise und die Interpretation von Schätz- und Testergebnissen erläutert.

Alle im Buch dargestellten Modellschätzungen und statistischen Tests können mit den gängigen Ökonometrie-Softwarepaketen durchgeführt werden. Die Anwendungsbeispiele

der meisten Kapitel sind mit Hilfe von EViews (Version 7) erstellt worden. Eine Ausnahme bildet nur Kapitel VII, für dessen Anwendungen sich das Programmpaket STATA ([www.stata.com](http://www.stata.com)) besser eignet als EViews.

**Zitierte Literatur**

Campbell, J., A. Lo und A. MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton.

Greene, W. H. (2011), *Econometric Analysis*, 7. Auflage, Prentice Hall, New Jersey.

Hayashi, F. (2000), *Econometrics*, Princeton University Press, Princeton.

Johnston, J. und J. DiNardo (1997), *Econometric Methods*, 4. Auflage, McGraw-Hill, New York.

*Michael Schröder*

Mannheim, Dezember 2011



## Verzeichnis der ergänzenden Unterlagen zum Download

Für dieses Lehrbuch bieten wir die im Buch verwendeten Daten zum Download an. Den zum Abruf der Daten notwendigen Webcode finden Sie auf der ersten Seite des Buches. Mit diesem Webcode können Sie sich in Kombination mit Ihrer E-Mail-Adresse einloggen und die Daten abrufen.

Folgende Inhalte stehen zur Verfügung:

### **Kapitel I bis VI und VIII: Directory Daten**

Die Daten sind im Excel-Format (Daten.xls, Industrieprod.xls, Auftragseingang.xls) abgespeichert. Eine Beschreibung der Daten befindet sich außerdem an den entsprechenden Stellen im Buch.

### **Kapitel VII: Directory Kap 7**

Die Daten sind in den beiden STATA-Dateien bivariat.dta und probit.dta enthalten. Außerdem sind sie im Excel-Format (bivariat.xls, probit.xls) verfügbar. Die detaillierte Beschreibung der Daten befindet sich in Kapitel VII im Buch.

---

## Inhaltsübersicht

Vorwort zur zweiten Auflage . . . . .	V
Autorenverzeichnis . . . . .	XI
I Statistische Eigenschaften von Finanzmarkt-Zeitreihen . . . . . <i>Michael Schröder</i>	1
II Regressionsanalyse . . . . . <i>Jürgen Kähler</i>	29
III Angewandte Zeitreihenanalyse . . . . . <i>Herbert S. Buscher</i>	99
IV Vektorautoregressive Modelle . . . . . <i>Peter Winker</i>	179
V Nichtstationarität und Kointegration . . . . . <i>Felix Schindler und Peter Winker</i>	227
VI Stochastische Volatilität . . . . . <i>Christian Schmitt</i>	267
VII Logit- und Probit-Modelle . . . . . <i>Andrea Szczesny und Ulrich Kaiser</i>	313
VIII Erstellung von Prognosemodellen . . . . . <i>Michael Schröder</i>	347
IX Tabellenanhang . . . . .	403
Stichwortverzeichnis . . . . .	433



## **Autorenverzeichnis**

### **Dr. Herbert S. Buscher**

Leiter des Bereichs Formale Methoden und Daten im Institut für Wirtschaftsforschung Halle (IWH).

### **Prof. Dr. Jürgen Kähler**

Professor für Volkswirtschaftslehre an der Universität Erlangen-Nürnberg und Research Associate am Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung (ZEW), Mannheim.

### **Prof. Dr. Ulrich Kaiser**

Inhaber des Lehrstuhls für Entrepreneurship an der Universität Zürich. Research Affiliate am Centre for Economics and Business Research an der Copenhagen Business School und Research Associate am Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung (ZEW), Mannheim.

### **Prof. Dr. Felix Schindler**

Senior Researcher im Forschungsbereich »Internationale Finanzmärkte und Finanzmanagement«, Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung (ZEW), Mannheim, und Juniorprofessor am Center for Real Estate Studies (CRES) an der Steinbeis Hochschule Berlin.

### **Dr. Christian Schmitt**

Managing Director, risklab GmbH, München.

### **Prof. Dr. Michael Schröder**

Leiter des Forschungsbereichs »Internationale Finanzmärkte und Finanzmanagement«, Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung (ZEW), Mannheim und außerplanmäßiger Professor für Asset Management an der Frankfurt School of Finance & Management, Frankfurt am Main.

### **Prof. Dr. Andrea Szczesny**

Inhaberin des Lehrstuhls für BWL, Controlling und Interne Unternehmensrechnung, Universität Würzburg.

### **Prof. Dr. Peter Winker**

Inhaber des Lehrstuhls für Statistik und Ökonometrie, Universität Gießen, sowie Research Associate am Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung (ZEW), Mannheim.



# **I Statistische Eigenschaften von Finanzmarkt-Zeitreihen**

Michael Schröder

- I.1 Einleitung
- I.2 Besondere Eigenschaften von Finanzmarkt-Zeitreihen
  - I.2.1 Wichtige Verteilungseigenschaften
  - I.2.2 Stationarität
- I.3 Hypothese der Markteffizienz und Prognostizierbarkeit
- I.4 Anhang: Einige Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
  - I.4.1 Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen und ihre Momente
  - I.4.2 Häufig verwendete Verteilungen für Hypothesentests
- I.5 Literaturverzeichnis

## I.1 Einleitung

Jeder, der Prognosemodelle für Finanzmarkt-Zeitreihen wie z. B. Wechselkurse, Zinsen und Aktienkurse erstellen möchte, sieht sich mit einer Reihe von besonderen Eigenschaften dieser Zeitreihen konfrontiert, die bei der Modellerstellung berücksichtigt werden müssen. Dazu zählen beispielsweise Abweichungen von der Normalverteilung und nicht-stationäres Zeitreihenverhalten. Außerdem stellen sich besondere Herausforderungen an die Prognosen, weil Kapitalmärkte durch nahezu effiziente Informationsverarbeitung gekennzeichnet sind.

In diesem Kapitel werden zunächst die wichtigsten statistischen Begriffe und Konzepte erläutert, die für das weitere Verständnis des Kapitels und der anderen Kapitel des Buches notwendig sind. Dazu zählt insbesondere die statistische Beurteilung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Finanzmarkt-Zeitreihen. Daran schließt sich die Beschreibung einer Reihe besonderer Eigenschaften von Finanzmarkt-Zeitreihen an.

Ein wichtiger Aspekt für die Beurteilung der Erfolgsaussichten von Finanzmarkt-Prognosen stellt eine (kurze) Auseinandersetzung mit der Theorie effizienter Märkte dar. Diese Theorie besagt unter anderem, dass es nicht möglich ist, aus der Prognose von Finanzmarkt-Zeitreihen einen systematischen und dauerhaften Gewinn zu erzielen. Die Gültigkeit der Theorie effizienter Märkte ist nicht unumstritten. Besonders Forschungsarbeiten zu Fragestellungen über Behavioral Finance setzen sie einer nachhaltigen Kritik aus. Als Maßstab für die Bewertung von Finanzmarkt-Prognosen sind die Folgerungen der Theorie effizienter Märkte jedoch nach wie vor gut geeignet und stellen eine nicht leicht zu überwindende Hürde für Prognosemodelle dar.

Am Ende dieses Kapitels sollten die Leser in der Lage sein,

- die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Finanzmarkt-Zeitreihen zu beurteilen,
- die Hypothese der Normalverteilung zu testen,
- die wichtigsten Eigenschaften von Finanzmarkt-Zeitreihen zu kennen,
- die Gefahren von statistischen Analysen mit nicht-stationären Zeitreihen einzuschätzen,
- die Aussagen der Theorie effizienter Märkte für die Prognostizierbarkeit von Finanzmarkt-Zeitreihen einzuschätzen.

## I.2 Besondere Eigenschaften von Finanzmarkt-Zeitreihen

In diesem Kapitel werden zunächst einige für die weitere Analyse zentrale Begriffe wie derjenige der Wahrscheinlichkeitsverteilung und die üblichen statistischen Kennziffern zur Beurteilung empirischer Verteilungen erklärt. Allerdings versteht sich dieses Kapitel nicht als allgemeine Einführung in die Statistik oder Ökonometrie, so dass nicht alle grundlegenden statistischen Begriffe definiert und erläutert werden. Eine solche Einführung in Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie findet sich in vielen Ökonometrie-Lehrbüchern wie z. B. Greene (2011). Einige Grundlagen zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, die in diesem Buch häufiger angesprochen werden, finden sich auch im Anhang (= Kapitel I.4).

Zu den danach behandelten besonderen Eigenschaften von Finanzmarkt-Zeitreihen zählen insbesondere Leptokurtosis, bedingte Heteroskedastizität und Nicht-Stationarität. Da die Gültigkeit der Stationaritätsannahme für die Zeitreihenanalyse von besonders großer Bedeutung ist, werden diese Verteilungseigenschaft und die möglichen Konsequenzen bei Verwendung von nicht-stationären Zeitreihen ausführlicher dargestellt.

### I.2.1 Wichtige Verteilungseigenschaften

Der grundlegende statistische Begriff für die weiteren Ausführungen ist derjenige der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Abbildung 1 zeigt beispielhaft ein Histogramm der Zeitreihe deutscher langfristiger Zinsen im Zeitraum Januar 1978 bis Februar 2011. Das Histogramm bezieht sich dabei auf die Veränderungen der Zinsen zum Vormonat. Die rechte Box zeigt einige wichtige Kennziffern zur Beurteilung dieser Zeitreihe.<sup>1</sup>

Die Veränderungen der Zinsen sind hier als logarithmische Differenz zum Vormonat berechnet:  $RET\_Z10DE = \ln\left(1 + \frac{Z10DE_t}{100}\right) - \ln\left(1 + \frac{Z10DE_{t-1}}{100}\right)$ . Zuvor werden die Zinsen, die im Original in Prozent vorliegen, durch 100 geteilt. Bei Zinsen wird auch häufig die einfache Differenz ( $Zins_t - Zins_{t-1}$ ) angewandt. Für kleine Veränderungen des Zinses ergeben die logarithmische und die einfache Differenz sehr ähnliche Werte, bei großen Veränderungen führt die einfache Differenz zu höheren Werten als die logarithmische Differenz.

Bei Aktienkursen und Wechselkursen wird hingegen entweder die Differenz der logarithmierten Zeitreihe oder die prozentuale Differenz, also  $\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$ , verwendet.<sup>2</sup> Dies ist bei allen Zeitreihen wichtig, die einen Trend aufweisen wie z. B. Aktienindizes oder makroökonomischen Indizes, da die einfache Differenz nur in Bezug auf den jeweiligen Indexstand interpretierbar ist. Bei der einfachen Differenz sind die resultierenden Werte außerdem von der Maßeinheit der Variablen abhängig.

Das Histogramm gibt an, wie häufig bestimmte Ausprägungen der Zinsdifferenzen in der Vergangenheit aufgetreten sind. Der Mittelwert der Zinsdifferenzen liegt bei  $-0,0000681$  und somit  $0,681$  Basispunkten. Die Zinsveränderungen sind leicht rechtsschief verteilt. Dies zeigt sich an mehreren Kennzeichen: Der Minimumwert ist absolut gesehen kleiner als der Maximumwert, für die auf einen Mittelwert von Null normierte Verteilung, der Median liegt links vom Mittelwert und die Schiefe (skewness) hat ein positives Vorzeichen. Eine besonders auffallende und für Finanzmarkt-Zeitreihen typische Eigenschaft ist der relativ hohe Wert des Kurtosiskoeffizienten. Als theoretischer Referenzwert gilt ein Wert von drei, der bei einer Normalverteilung vorliegt. Bei Werten von größer als drei weist die Verteilung Leptokurtosis auf.

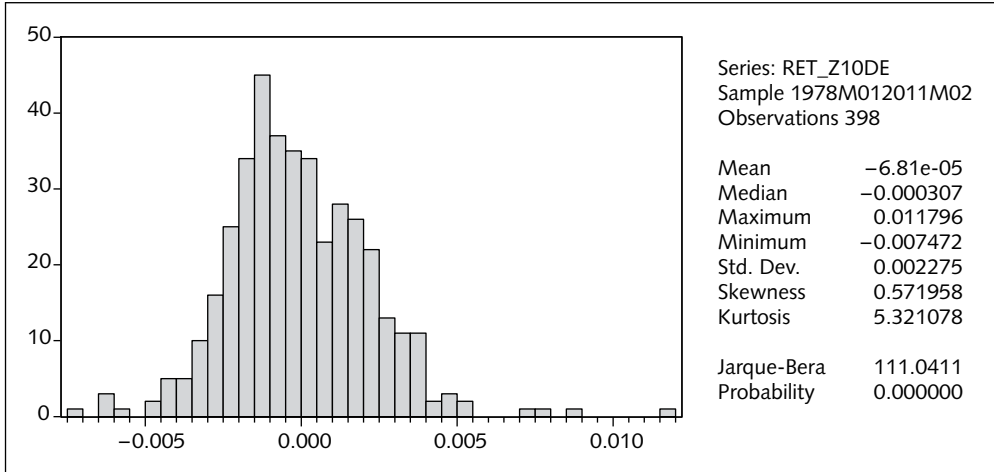
Ein Histogramm ist eine empirische Näherungsform der Dichtefunktion, also der ersten Ableitung der Verteilungsfunktion. Für die Beurteilung empirischer Dichtefunktionen wird häufig ein Vergleich mit der theoretischen Dichtefunktion der Normalverteilung durchgeführt:

$$(1) \quad g(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ mit } \mu = \text{Erwartungswert und } \sigma^2 = \text{Varianz}$$

1 Die Berechnungen wurden mit EViews durchgeführt.

2 Bei der logarithmischen Differenz wird eine zeitstetige Veränderung der Zeitreihe angenommen, bei der Prozentveränderung (bzw. bei der einfachen Differenz angewandt auf Zinsen) eine zeitdiskrete Veränderung. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass die logarithmische Differenz über die gesamten reellen Zahlen definiert ist, während die prozentuale Veränderung nicht kleiner als  $-100$  Prozent werden kann.





**Abb. 1:** Histogramm deutscher langfristiger Zinsen (Restlaufzeit 10 Jahre), Veränderungen zum Vormonat, Zeitraum: Januar 1978 bis Februar 2011, Angaben auf der X-Achse in Prozent/100.

Abbildung 2 zeigt drei Verläufe von Normalverteilungen mit jeweils gleichem Erwartungswert aber unterschiedlicher Varianz. Für die weitere Analyse sind die ersten vier zentralen Momente der Normalverteilung von Bedeutung:

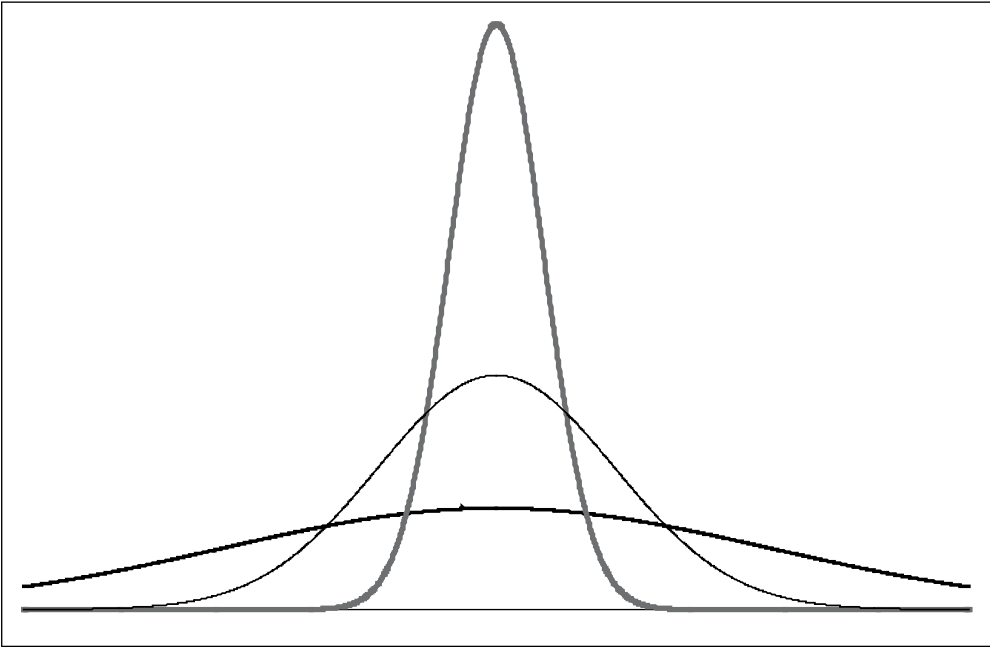
Erwartungswert	$= E(X) = \mu,$	Varianz	$= E((X - \mu)^2) = \sigma^2$
Schiefekoeffizient	$= \frac{E((X - \mu)^3)}{\sigma^3} = 0,$	Kurtosiskoeffizient	$= \frac{E((X - \mu)^4)}{\sigma^4} = 3$

Die Normalverteilung wird vollständig durch ihre ersten zwei Momente, Erwartungswert und Varianz, bestimmt. Die Schiefe ist bei der Normalverteilung gleich Null, da die Verteilung symmetrisch ist. Bei einer linksschiefen (= rechtssteilen) Verteilung ist die Schiefe negativ, bei einer rechtsschiefen Verteilung entsprechend positiv. Der Kurtosiskoeffizient hat bei der Normalverteilung einen Wert von drei. Schiefekoeffizient und Kurtosiskoeffizient sind jeweils mit der Standardabweichung  $\sigma$  skaliert.

**1.2.1.1 Leptokurtosis**

Wie das Beispiel der Zinsveränderungen (Abbildung 1) zeigt, liegt der Wert der Kurtosis bei etwa 5,32, während er für die Normalverteilung nur 3 beträgt. Dies bedeutet, dass im Vergleich zur Normalverteilung mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in den Rändern der Verteilung liegt. Oder anders gesagt, die Wahrscheinlichkeit für besonders große positive oder negative Veränderungen ist höher als sie es bei normalverteilten Zinsveränderungen wäre. Aber auch in der Mitte der Verteilung ist die Wahrscheinlichkeitsmasse größer als bei der Normalverteilung. Abbildung 3 verdeutlicht diese Zusammenhänge.

Abbildung 3 vergleicht den Verlauf der Normalverteilung mit einer Dichtefunktion, die Leptokurtosis aufweist. Eine Realisation in einem engen Bereich direkt um den Erwartungswert ist bei Leptokurtosis wahrscheinlicher als bei Normalverteilung. Aber insbesondere



**Abb. 2:** Normalverteilungen mit gleichem Erwartungswert und unterschiedlicher Varianz

trifft diese Aussage für die Ränder der Verteilung zu, also für besonders große Werte im negativen und positiven Bereich. Leptokurtosis ist sehr häufig bei den Renditen von Finanzmarkt-Variablen anzutreffen. Besonders ausgeprägt ist diese Eigenschaft, wenn die Daten eine sehr hohe Frequenz haben, also z. B. bei Tagesdaten. Durch eine Aggregation auf beispielsweise Monats- oder Quartalswerte wird die Verteilung dagegen einer Normalverteilung ähnlicher.

Ein statistischer Test zur Bestimmung einer signifikanten Abweichung des Kurtosiskoeffizienten von dem Wert bei Normalverteilung ( $= 3$ ) baut darauf auf, dass der Schätzer des Kurtosiskoeffizienten asymptotisch normalverteilt ist mit Erwartungswert 3 und Varianz  $24/T$ :

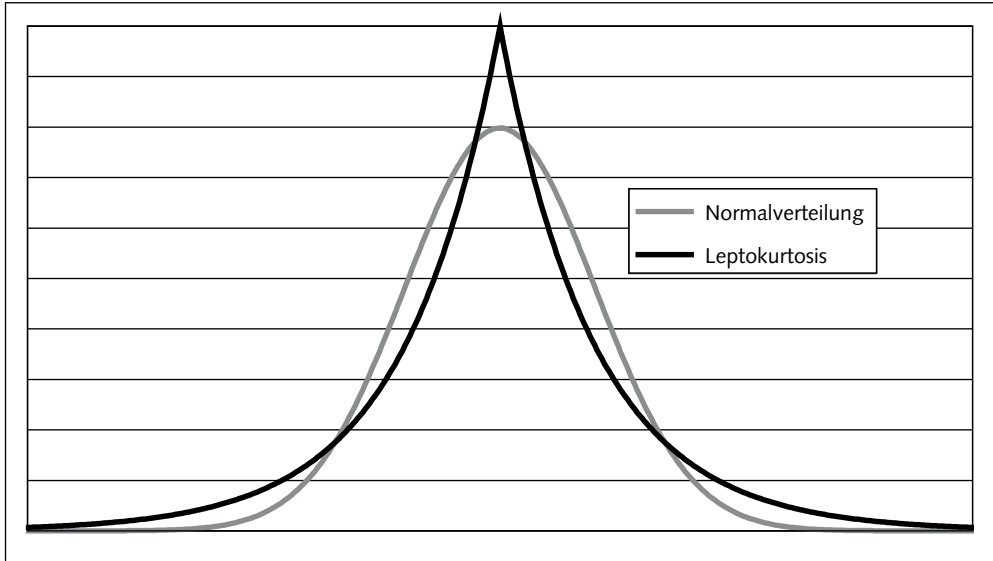
$$(2) \quad \hat{k} = \frac{\frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T (X_i - \hat{\mu})^4}{\hat{\sigma}^4} \sim N\left(3, \frac{24}{T}\right)$$

Dabei ist  $T$  die Anzahl der Beobachtungen,  $\hat{\mu}$  ist der Schätzer des Erwartungswertes

( $\hat{\mu} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T X_i$ ) und  $\hat{\sigma}$  ein Schätzer der Standardabweichung ( $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T (X_i - \hat{\mu})^2}$ ) der

empirischen Verteilung z. B. der Verteilung der Zinsveränderungen. Der Kurtosiskoeffizient ist dann signifikant verschieden von 3 wenn gilt:

$$(3) \quad \left| \frac{\hat{k} - 3}{\sqrt{24/T}} \right| > z_{\alpha}.$$



**Abb. 3:** Stilisierter Verlauf einer Dichtefunktion mit Leptokurtosis

Im Nenner der Teststatistik steht die Standardabweichung von  $\hat{k}$ . Die Teststatistik ist asymptotisch standardnormalverteilt.  $z_\alpha$  ist der kritische Wert aus der Standardnormalverteilung, der zur Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)  $\alpha$  gehört. Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % ist der kritische Wert 2,575 und für 5 % entsprechend 1,96. Dieser Test gilt allerdings nur näherungsweise für sehr große Stichprobenumfänge, da der Schätzer für den Kurtosiskoeffizienten verzerrt ist. Der in Abbildung 1 ausgewiesene Kurtosiskoeffizient von 5,33 ist mit Hilfe von EViews berechnet, das standardmäßig die Formel (2) verwendet.

Der Test auf Basis der exakten Momente sieht nach Urzua (1996) so aus:

$$(4) \quad \left| \frac{\hat{k} - a}{\sqrt{b}} \right| > z_\alpha, \text{ mit } a = 3 \cdot \frac{T-1}{T+1} \text{ und } b = 24 \cdot \frac{T(T-2)(T-3)}{(T+1)^2(T+3)(T+5)}$$

Bei Vorliegen von Leptokurtosis muss vor allem beachtet werden, dass die Berechnung von Risikokennziffern wie z. B. Value-at-Risk (VaR) aus der empirischen Renditeverteilung nicht mehr auf Basis der Normalverteilung durchgeführt werden darf, da das Risiko sonst signifikant unterschätzt wird.

### 1.2.1.2 Test auf Normalverteilung

Viele Schätz- und Testverfahren gehen von der Annahme normalverteilter Fehlerterme einer Regressionsgleichung aus. Dies ist beispielsweise der Fall bei den üblichen t-Tests oder F-Tests zur Überprüfung der Signifikanz der geschätzten Parameter  $\beta_1$  der Regressionsgleichung  $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \epsilon$ . Wenn für die Fehlerterme  $\epsilon$  die Annahme der Normalverteilung nicht gilt, dann sind die Parametertests nur noch asymptotisch gültig, das heißt, dass diese Tests nur noch bei Vorliegen einer großen Anzahl an Beobachtungen sinn-

voll durchführbar sind. Diese Aussage baut auf der Gültigkeit des Zentralen Grenzwertsatzes auf. Er besagt, dass die Summe unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen asymptotisch normalverteilt ist. Die Abweichung der Fehlerterme von der Normalverteilung wird somit umso kleiner, je mehr Beobachtungen vorliegen.

Eine Einschränkung muss dennoch gemacht werden. Der Zentrale Grenzwertsatz setzt voraus, dass das zweite Moment, also die Varianz, der Verteilung existiert. Dies ist bei der Verteilung z. B. von Aktienrenditen nach Krämer (2000) jedoch durchaus zweifelhaft. Es könnte auch sein, dass die theoretische Verteilung von Finanzmarktrenditen eine stabile Verteilung mit unendlicher Varianz ist.<sup>3</sup> In diesem Fall gilt die Annahme einer asymptotischen Normalverteilung nicht mehr und alle auf dieser Annahme beruhenden Tests können nicht mehr sinnvoll angewandt werden. Ob die Varianz für die theoretischen Verteilungen von Finanzmarktrenditen existiert, ist eine in der Forschung noch nicht abschließend geklärte Frage. Bei einer erheblichen Abweichung von der Normalverteilung, die auf einen sehr großen Wert des Kurtosiskoeffizienten zurückzuführen ist, sollten auf jeden Fall z. B. Parametertests oder Tests auf Vorliegen von Autokorrelation kritisch interpretiert werden.

Ein häufig verwendeter Test auf Normalverteilung ist der Jarque-Bera-Test. Er baut auf Schätzungen des Schiefekoeffizienten und des Kurtosiskoeffizienten auf. Die Testgröße ist:

$$(5) \quad JB = T \cdot \left( \frac{\hat{s}^2}{6} + \frac{(\hat{k} - 3)^2}{24} \right) \sim \chi^2(2)$$

JB ist asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit 2 Freiheitsgraden. Dies ist die Version des Jarque-Bera Tests, die in EViews implementiert ist. Sie gilt allerdings nur für große Stichprobenumfänge. Bei kleinen Stichprobenumfängen ist der Test entsprechend mit Vorsicht zu interpretieren. Alternative Tests auf Normalverteilung, die insbesondere für kleine Stichprobenumfänge bessere Eigenschaften als der populäre Jarque-Bera Test aufweisen, sind z. B. in d'Agostino (1986) beschrieben.

$\hat{k}$  entspricht dem Wert von Formel (2).  $\hat{s}$  ist der Schätzer des Schiefekoeffizienten. Er ist asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert null und Varianz  $6/T$ . Auf Basis von Formel (6) wird auch der Schätzwert berechnet, der in EViews (vgl. Abbildung 1) ausgewiesen wird:

$$(6) \quad \hat{s} = \frac{\frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T (X_i - \hat{\mu})^3}{\hat{\sigma}^3} \sim N\left(0, \frac{6}{T}\right)$$

Die Nullhypothese der Normalverteilung ( $H_0 : \hat{s} = 0$  und  $\hat{k} = 3$ ) wird dann verworfen, wenn gilt:  $JB > \chi_{\alpha}^2(2)$ . Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  ist der kritische Wert gleich 9,21, bei 5% Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt er 5,99.

3 (Faltungs)stabile Verteilungen sind folgendermaßen definiert: Die Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen gehört der gleichen Verteilung an wie die Summanden. Die Klasse der stabilen Verteilungen umfasst beispielsweise die Normalverteilung, die Cauchy-Verteilung und die Lévy-Verteilung.

Abbildung 1 gibt die Ergebnisse des Jarque-Bera-Tests für die Veränderungen der deutschen langfristigen Zinsen an. Die Testgröße JB hat einen Wert von 111,04 und ist damit deutlich größer als der kritische Wert bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 %. Die Normalverteilungshypothese kann daher für die Zinsveränderungen klar abgelehnt werden.

Ein Test auf Normalverteilung kann auch jeweils einzeln in Bezug auf den Schiefekoeffizienten und den Kurtosiskoeffizienten durchgeführt werden. Dies hat den Vorteil, dass der Grund für eine signifikante Abweichung von der Normalverteilung besser erkannt werden kann. Dafür sollten am besten die exakten und nicht die asymptotischen Tests verwendet werden.<sup>4</sup> Für den Kurtosiskoeffizienten ist dies in (4) wiedergegeben. Für den Schiefekoeffizienten ist der exakte Test nach Urzua (1996):

$$(7) \quad \left| \frac{\hat{s}}{\sqrt{c}} \right| > z_{\alpha}, \text{ mit } c = 6 \cdot \frac{(T-2)}{(T+1)(T+3)}$$

Im Nenner der standardnormalverteilten Teststatistik steht wieder ein unverzerrter Schätzer der Standardabweichung. Im Falle der Zinsveränderungen von Abbildung 1 liegen die Ursachen für die Abweichungen von der Normalverteilung sowohl in der zu hohen Kurtosis als auch in der signifikant von Null verschiedenen Schiefe. Die Testgrößen sind mit 4,69 bzw. 9,69 beide erheblich größer als der kritische Wert aus der Standardnormalverteilung bei 1 % Irrtumswahrscheinlichkeit. Auf Basis der exakten Tests für Schiefe- und Kurtosiskoeffizient lässt sich auch ein modifizierter Jarque-Bera Test (mJB) entwickeln, der bessere Eigenschaften in kleinen Stichproben aufweist (vgl. Urzua (1996)).<sup>5</sup>

$$(8) \quad \text{mJB} = \left( \frac{\hat{s}^2}{c} + \frac{(\hat{k} - a)^2}{b} \right) \sim \chi^2(2), \text{ mit } a, b \text{ und } c \text{ analog zu (4) und (7).}$$

mJB ist asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit 2 Freiheitsgraden. Urzua (1996) hat für diesen Test und für JB auch kritische Werte für kleine Stichprobenumfänge simuliert, die deutlich von den asymptotisch geltenden kritischen Werten der  $\chi^2$ -Verteilung abweichen. Für den Fall der Veränderungen der deutschen langfristigen Zinsen ergibt sich für mJB ein Wert 115,9. Er weicht etwas von dem Wert ab, der von EViews ausgewiesen wird. Allerdings kommen beide Tests zu dem gleichen Ergebnis, die Normalverteilungshypothese abzulehnen.

### 1.2.1.3 Bedingte Heteroskedastizität

Sehr häufig tritt bei Renditen von Finanzmarktzeitreihen das Phänomen auf, dass längere Phasen mit entweder sehr hohen oder sehr kleinen Kursausschlägen auftreten. Abbildung 4 zeigt den Verlauf der logarithmischen Differenzen des DAX (Kursindex) unter Verwendung von Tagesdaten für den Zeitraum vom 4. Januar 1988 bis 15. Februar 2011.

4 Die exakten Tests gehen davon aus, dass die zu analysierenden Zeitreihen die ursprünglichen Beobachtungen darstellen. Falls die Zeitreihen jedoch die Residuen einer Regressionsschätzung sind, dann gelten auch die exakten Tests nur näherungsweise. Vgl. dazu die Ausführungen und Literaturhinweise in Urzua (1996, 249).

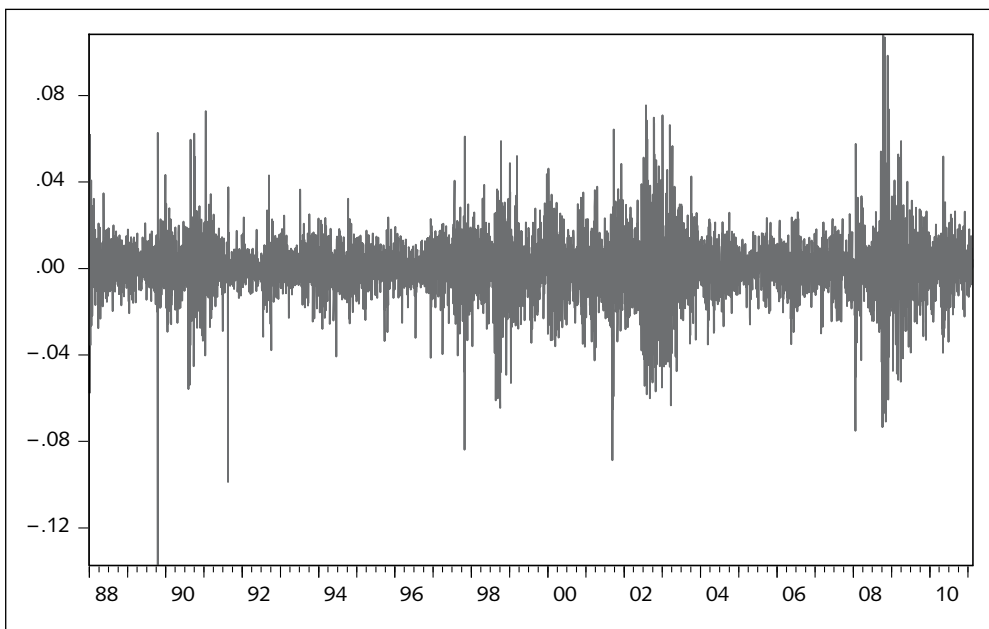
5 Dieser Test – und die in Urzua (1996, 249) aufgeführten kritischen Werte für kleine Stichprobenumfänge – gelten für die ursprünglichen Beobachtungen. Für die Fehlerterme einer Regressionsschätzung ist die Teststatistik zu korrigieren.

Aus Abbildung 4 ist zunächst ersichtlich, dass die täglichen Veränderungsrate des DAX stark veränderlich sind. Die Werte folgen aber auch einem zeitlichen Muster: auf hohe Kursschläge folgen häufig weitere Tage mit ebenfalls hohen Veränderungen und ebenso zeigen sich längere Perioden mit relativ geringen Veränderungen. Dies deutet darauf hin, dass die Varianz der Verteilung der Zinsveränderungen zeitlich nicht konstant ist. Eine solche Eigenschaft ist bei Finanzmarkt-Zeitreihen sehr häufig anzutreffen. Sie wird als bedingte Heteroskedastizität bezeichnet. Eine ausführliche Darstellung von dafür geeigneten Schätz- und Testverfahren sowie praktischen Beispielen für die Prognose zukünftiger Volatilität findet sich in Kapitel VI (»Stochastische Volatilität«).

Der einfachste Fall bedingter Heteroskedastizität kann mit folgendem Modell beschrieben werden:

$$(9) \quad Y_t = \varepsilon_t \text{ mit } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \text{ und } \sigma_t^2 = a + b \cdot \varepsilon_{t-1}^2$$

In diesem Modell ist die Variable  $Y$  ein normalverteilter stochastischer Prozess mit Mittelwert null und zeitabhängiger Varianz. Die bedingte Varianz wird bestimmt durch die quadrierten Fehlerterme der Vorperiode. Für den Fall  $b = 0$  liegt keine bedingte Heteroskedastizität vor und die Varianz ist gleich dem Parameter  $a$ . Für die Parameter gilt die Restriktion  $a > 0$  und  $0 < b < 1$ . Wenn diese Restriktion erfüllt ist, kann die Varianz nur positive Werte annehmen. Das Modell (9) gehört zur Klasse der »autoregressive conditional heteroskedasticity«-Modelle, abgekürzt ARCH-Modelle. Es ist konkret ein ARCH (1)-Modell, da nur die um eine Periode verzögerten quadrierten Fehlerterme Berücksichtigung finden.



**Abb. 4:** Deutscher Aktienindex (DAX), Kursindex, erste logarithmische Differenzen, Tagesdaten, Zeitraum 4. Januar 1988 bis 15. Februar 2011

Bei Vorliegen von bedingter Heteroskedastizität in einer Zeitreihe liegt auch eine Kurtosis von größer als 3 vor.<sup>6</sup> Durch die Schätzung eines ARCH-Modells vermindert sich die Leptokurtosis in den Fehlertermen des Modells. Im oben gezeigten Beispiel mit bedingt normalverteilten Fehlertermen verschwindet die Leptokurtosis sogar ganz. Meistens ergibt sich allerdings nur eine geringere Verminderung der Kurtosis, wenn die bedingte Verteilung der Fehlerterme nicht die Normalverteilung ist. Die Fehlerterme  $\epsilon$  weisen in der Regeln eine deutlich geringere Leptokurtosis auf als die Ursprungszeitreihe, die Kurtosis dürfte jedoch in den meisten Fällen noch immer signifikant größer als 3 sein.

Welche Konsequenzen ergeben sich nun für die ökonometrische Modellbildung, wenn bedingte Heteroskedastizität in den Fehlertermen vorliegt? Bei Vorliegen von bedingter Heteroskedastizität sind die Testverteilungen z. B. für t- und F-Tests verzerrt und auf Basis der tabellierten kritischen Werte dieser Verteilungen können leicht falsche Schlüsse bezüglich der Signifikanz der Parameter gezogen werden. Aber selbst dann, wenn die bedingte Heteroskedastizität z. B. mit einem ARCH-Modell korrekt modelliert wird, sind manche Testverteilungen, insbesondere bei Tests auf Autokorrelation der Fehlerterme, verzerrt. Darauf gehen Krämer/Runde (1994) näher ein. Beispielsweise wird in diesen Fällen häufig eine Autokorrelation der Fehlerterme als signifikant erkannt, obwohl sie bei Verwendung der korrekten (aber nicht genau bekannten) Testverteilung tatsächlich nicht signifikant wäre. Dies ist insbesondere wichtig für die Beurteilung, ob zukünftige Renditen durch die eigene Historie prognostiziert werden können.

Bei Vorliegen von bedingter Heteroskedastizität ist es daher immer ratsam, nicht die üblichen geschätzten Standardfehler der Fehlerterme für die Berechnung von Tests zu verwenden, sondern sogenannte heteroskedastizitätsrobuste Standardfehler (vgl. Hansen (1999)). Es ist dabei nicht notwendig, ein Modell stochastischer Volatilität anzuwenden. Die Koeffizientenschätzungen z. B. mit dem Kleinste-Quadrate-Verfahren sind nach wie vor unverzerrt und liefern die korrekten Schätzwerte (vgl. z. B. Greene (2011)). Allerdings ist die Schätzung der Varianz der Fehlerterme möglicherweise sogar erheblich verzerrt. Daher sollten bei Vorliegen von bedingter Heteroskedastizität die erwähnten heteroskedastizitätsrobusten Schätzmethode für die Residualvarianz verwendet werden, damit die Parameter-tests wieder sinnvoll interpretiert werden können. In EViews sind solche Schätzverfahren enthalten und können daher relativ leicht angewandt werden. In Kapitel VIII wird im Zusammenhang mit der Erstellung von Prognosemodellen näher darauf eingegangen.

Die Klasse der ARCH-Modelle, die üblicherweise zur Schätzung von Modellen mit bedingter Heteroskedastizität verwendet werden, ist inzwischen um sehr viele neue Modelltypen angewachsen. Diese Zeitreihen-Modelle eignen sich in der Praxis gut für die Prognose zukünftiger Volatilität und finden daher besondere Beachtung, wenn es um die Bewertung von Optionen geht. Eine ausführliche Darstellung der wichtigsten dieser Modelle sowie ein Test auf bedingte Heteroskedastizität finden sich in Kapitel VI.

<sup>6</sup> In Kapitel VI wird dies für ein ARCH (1)-Modell konkret berechnet.

#### I.2.1.4 Weitere Unterschiede zu makroökonomischen Zeitreihen

Finanzmarkt-Zeitreihen weisen noch weitere häufig auftretende Unterschiede zu makroökonomischen Zeitreihen auf, die allerdings weniger »spektakulär« sind als Leptokurtosis oder bedingte Heteroskedastizität. Es ist jedoch trotzdem wichtig und nützlich, diese Eigenschaften bei der empirischen Modellierung zu berücksichtigen.

##### a) Publikationsverzögerungen

Finanzmarkt-Zeitreihen weisen z. B. keine Publikationsverzögerung auf. Kurswerte sind praktisch sofort bekannt und können entsprechend zeitnah in einem ökonometrischen Prognosemodell verwendet werden. Dies hat Bedeutung für die Schätzung eines Prognosemodells und die anschließende Bewertung der Prognosegüte. Bei makroökonomischen Variablen wie z. B. Bruttoinlandsprodukt und Industrieproduktion werden die aktuellen Daten erst einige Monate bzw. Quartale nach dem Entstehen der zugrunde liegenden ökonomischen Vorgänge veröffentlicht. Entsprechend muss bei der Erstellung von Prognosen diese Publikationsverzögerung auch berücksichtigt werden, da sonst für einen vergangenen Zeitpunkt  $t$  Informationen bei der Modellbildung vorausgesetzt werden, die erst in  $t + n$  tatsächlich bekannt waren. Das folgende Beispiel soll die Vorgehensweise näher darstellen: Angenommen, das Modell sei  $Y_t = a + bX_{t-1} + \varepsilon_t$  und die erklärende Variable  $X$  ist nur bis zum Zeitpunkt  $(t-2)$  bekannt. Die Schätzung des Modells kann dann nur die Daten bis zum Zeitpunkt  $(t-2)$  berücksichtigen und die erste Prognose für  $Y$  bezieht sich auf Periode  $t$ . Das Informationsdefizit kann möglicherweise dadurch reduziert werden, dass ein geeignetes Prognosemodell für  $X$  entwickelt wird, das eine gute Prognose von  $X(t-1)$ ; mit den Daten bis  $(t-2)$  erlaubt. In diesem Fall kann möglicherweise die Verwendung der Prognose für  $X(t-1)$  auch zu einer Verbesserung der Prognose für  $Y(t)$  führen.

Schwierig ist die Berücksichtigung von Publikationsverzögerungen dann, wenn sich das statistische Erhebungsverfahren im Laufe der Zeit verändert hat. Ein Beispiel: Wenn für eine zurückliegende Periode z. B. Februar 1982 die heute vorliegende Publikationsverzögerung von einem Monat verwendet wird, während sie damals zwei oder drei Monate betrug, dann werden die Prognosen für den zurückliegenden Zeitraum besser sein, als sie es zum damaligen Zeitpunkt tatsächlich gewesen wären. Entsprechend wird die Güte des Prognosemodells zu hoch eingeschätzt. Bei ausschließlicher Verwendung von Kapitalmarkt-Zeitreihen ist in dieser Hinsicht die Modellierung jedoch einfacher, da eine Publikationsverzögerung praktisch ausgeschlossen werden kann.

##### b) Datenfrequenz

Ein weiterer Vorteil von Finanzmarkt-Daten ist die vergleichsweise hohe Datenfrequenz. Finanzmarkt-Daten sind typischerweise auf Tagesbasis verfügbar. Mit etwas größerem Aufwand ist es sogar möglich, Intra-Tagesdaten z. B. Tickerdaten zu erheben. Dies ermöglicht die Konstruktion von sehr kurzfristigen Prognosemodellen unter Verwendung der jeweils aktuellsten Kapitalmarkt-Informationen. Allerdings kann z. B. bei Prognosen mit Tagesdaten in der Regel nur noch auf Finanzmarkt-Zeitreihen als »erklärende Variable« zurückgegriffen werden, da makroökonomische Daten bestenfalls als Monatsdaten verfügbar sind. Eine Ausnahme bilden Analysen, die Ticker-Daten verwenden und damit z. B. über eine Eventstudie die Wirkungen der Ankündigung neuer makroökonomischer Daten auf die Kapitalmärkte untersuchen.



### c) Datenrevisionen und Saisonbereinigung

Makroökonomische Variablen werden typischerweise häufig nachträglich revidiert. Außerdem weisen sie meistens eine ausgeprägte Saisonfigur auf, so dass makroökonomische Zeitreihen häufig sogar nur als saisonbereinigte Zeitreihen vorliegen. Für die Erstellung von Prognosemodellen für Finanzmarkt-Zeitreihen hat dies folgende Auswirkung: Finanzmärkte reagieren meistens auf die erste Veröffentlichung neuer makroökonomischer Daten. Durch rückwirkende Datenrevisionen und neu durchgeführte Saisonbereinigungen entsprechen die dem Prognostiker vorliegenden makroökonomischen Daten nicht mehr denjenigen Informationen, die den Kapitalmärkten in der Vergangenheit vorlagen und auf die sie reagiert haben. Es werden vielmehr bei der Modellbildung teilweise Informationen verwendet, die erst heute bekannt sind.

Eine mögliche Folge davon ist, dass Zusammenhänge zwischen Makro- und Finanzmarkt-Variablen nicht richtig erkannt werden. Es kann sowohl vorkommen, dass wirklich vorhandene Zusammenhänge nicht gefunden werden, als auch dass Variablen fälschlicherweise statistisch signifikant erscheinen, obwohl tatsächlich kein Zusammenhang besteht. Außerdem ändern sich Ausprägungen der saisonbereinigten Zeitreihen laufend, da bei jeder Neuschätzung der Saisonkomponenten auch die gesamte Historie der Zeitreihe von Veränderungen betroffen ist. Selbst wenn diese Veränderungen nicht sehr groß sind, so ergibt sich doch ein zusätzlicher störender Einfluss, der auch Instabilitäten des Prognosemodells bewirken kann.

Außerdem hat es Auswirkung auf die Bewertung der Prognosegüte. Im Allgemeinen dürfte die bei den vergangenheitsbezogenen Prognosetests gefundene Prognosegüte bei der Anwendung der Modelle in der Zukunft nicht aufrechterhalten werden können. Solche Fehlbewertungen können nur dadurch vermieden werden, dass bei den Tests der Prognosemodelle für die Vergangenheit auch der tatsächliche Informationsstand berücksichtigt wird, der zum damaligen Zeitpunkt vorlag.

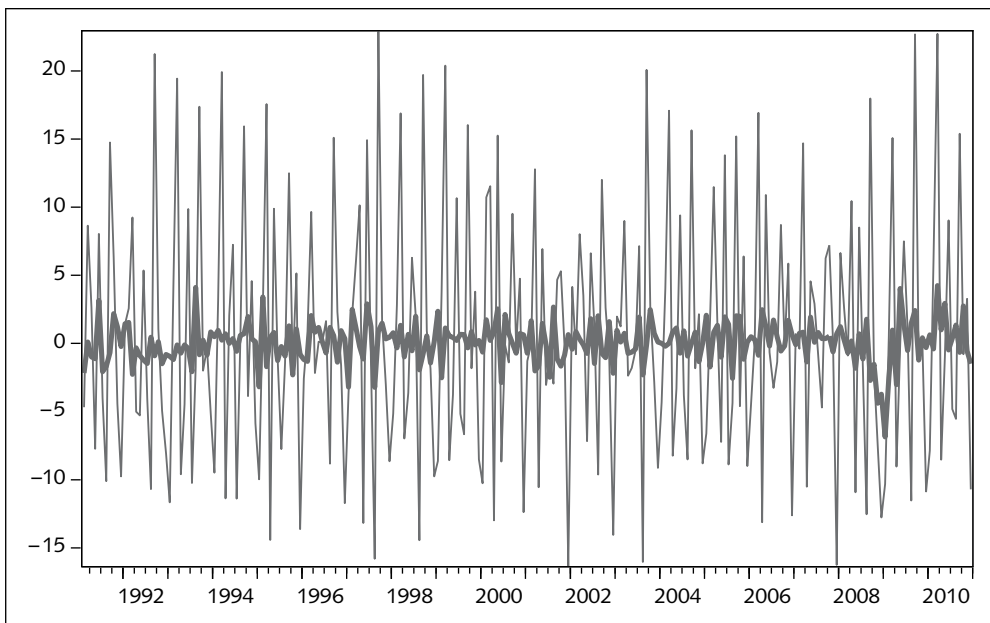
Saisonbereinigte Zeitreihen weisen noch ein weiteres Problem auf. Jedes Saisonbereinigungsverfahren wird im Allgemeinen zu anderen Schätzungen der Saisonkomponenten führen, so dass die mit verschiedenen Verfahren saisonbereinigten Zeitreihen auch jeweils nicht identisch sind. Rietzler/Stephan/Wolters (2001) geben einen Überblick zu den bekannten Saisonbereinigungsverfahren und ihren Eigenschaften. Sie verdeutlichen die unterschiedlichen Ergebnisse dieser Verfahren mit Hilfe von Anwendungen für die Daten der volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung aller an der Europäischen Währungsunion teilnehmenden Staaten. Allerdings gibt es prinzipiell kein optimales Verfahren für Saisonbereinigung, da die wahren Saisoneinflüsse nicht beobachtbar sind. Die drei Autoren empfehlen den statistischen Ämtern der EU, auch die nicht saisonbereinigten Daten zusammen mit einem benutzerfreundlichen ökonometrischen Bereinigungsverfahren der Öffentlichkeit zur Verfügung zu stellen. Dann könnten alle Interessenten die Saisonbereinigung für die Zeitreihen selbst durchführen.

Es ist in jedem Fall sinnvoll, makroökonomische Zeitreihen mit jeweils demselben Verfahren (z. B. X-12-ARIMA, Berliner Verfahren, etc.) um Saisoneinflüsse zu bereinigen. Die meisten Ökonometrie-Softwarepakete enthalten schon die gängigen Verfahren und diese können damit relativ einfach angewandt werden. Eine solche Vorgehensweise würde zumindest Verzerrungen vermeiden, die darauf zurückzuführen sind, dass die einzelnen Makro-Zeitreihen mit unterschiedlichen Verfahren saisonbereinigt worden sind. Auch die Verwendung von in der Vergangenheit noch nicht bekannten Informationen über die Sai-

sonkomponenten lässt sich durch eine periodengerechte eigene Durchführung der Saisonbereinigung vermeiden.

Abbildung 5 zeigt die monatlichen Veränderungsrate der Industrieproduktion in Deutschland saisonbereinigt und nicht saisonbereinigt. Der allergrößte Teil der Varianz der Ursprungswerte wird durch die Saisonkomponenten bestimmt. Eine Bereinigung dieser Zeitreihe könnte in einem Regressionsmodell durch Verwendung so genannten Saisondummy-Variablen erfolgen. Allerdings muss die Saison keineswegs zeitlich stabil und linear sein und auch wichtige zusätzliche Informationen wie z. B. die Anzahl der Arbeitstage in einem Monat können bei Verwendung von Dummy-Variablen nicht berücksichtigt werden. Es ist daher vermutlich das Beste, ein Saisonbereinigungsverfahren eines Ökonometrie-Softwarepaketes zu verwenden und damit die Zeitreihen vor der Verwendung im Prognosemodell zu bereinigen. Auf die ökonometrische Behandlung von saisonalen Zeitreihen wird in Kapitel III (»Angewandte Zeitreihenanalyse«, Unterkapitel III.4) eingegangen.

Finanzmarktzeitreihen weisen typischerweise keine Saisonkomponente auf. Eine systematische Saisonkomponente könnte leicht durch eine Handelsstrategie gewinnbringend ausgenutzt werden, als Folge würde die Saisonfigur wieder verschwinden. Taylor (2008) berichtet von zahlreichen Kalendereffekten in Finanzmarkt-Zeitreihen, die in der Finanzmarktforschung entdeckt wurden. Einige Arbeiten stellen einen Januareffekt fest: Im Januar scheinen die Aktienrenditen im Durchschnitt höher zu sein als in den anderen Monaten. Für Aktienkurse wurde ebenfalls herausgefunden, dass die Renditen an Montagen unterdurchschnittlich sind. Eine ausführliche Beschreibung der gefundenen Kalendereffekte findet sich in Thaler (1987a, 1987b).



**Abb. 5:** Industrieproduktion Deutschland, Vergleich zwischen saisonbereinigten und nicht saisonbereinigten Werten, Febr. 1991 bis Dez. 2010, monatliche Veränderungsrate in Prozent

Allerdings weist Taylor (2008) darauf hin, dass möglicherweise zumindest einige dieser Effekte nur statistische Artefakte darstellen, die auf eine ungenaue Berücksichtigung der Verteilungseigenschaften der Renditen zurückzuführen sein könnten. Darauf weisen auch Krämer und Runde (1996) in ihrer Analyse der Renditen deutscher Aktien hin. Ein ökonomischer Grund für das Vorhandensein solcher »Saisoneffekte« könnte darin liegen, dass diese Regelmäßigkeiten zu klein sind, um systematisch gewinnbringend ausgenutzt zu werden. Außerdem könnte es sein, dass zwar die Renditen z. B. von Aktien in bestimmten Kalenderperioden signifikant höher oder niedriger sind als im Durchschnitt, dass aber auch das Risiko entsprechend höher oder niedriger ist. In diesem Fall könnte es sein, dass die risikobereinigte Rendite keine zeitlichen Regelmäßigkeiten mehr aufweist. Allerdings ist insgesamt noch relativ unklar, was diese Kalendereffekte tatsächlich verursacht und ob sie wirklich mehr als nur statistische Artefakte sind.

### 1.2.2 Stationarität

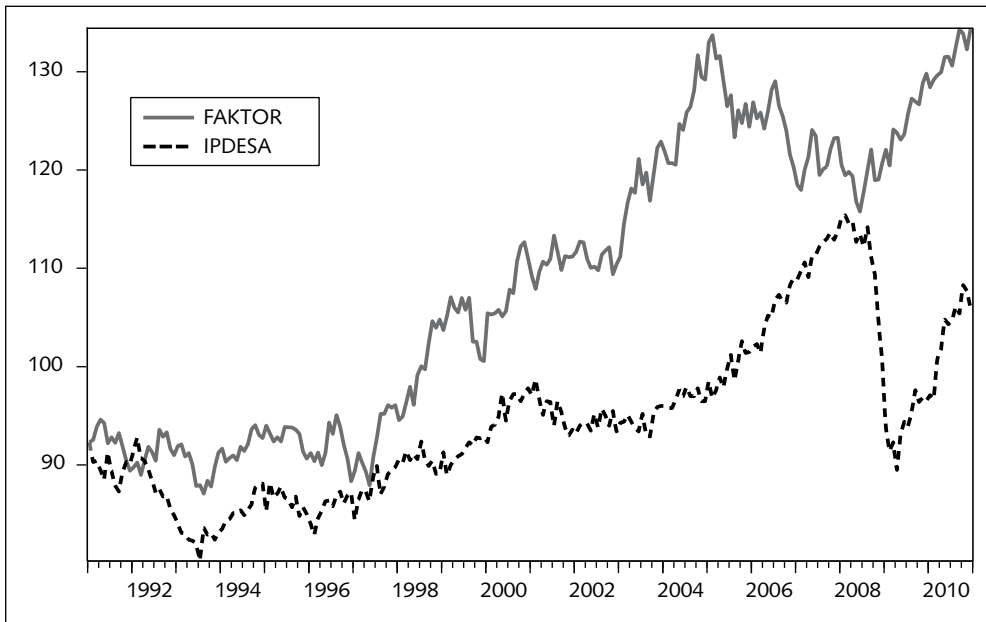
Für die statistische Analyse von Zeitreihen ist die Eigenschaft der Stationarität von zentraler Bedeutung. Ökonometrische Schätzungen und Testverfahren auf Basis von nichtstationären Zeitreihen können leicht zu schwerwiegenden Fehlschlüssen führen. Ein klassischer Artikel zu den statistischen Problemen, die bei Regressionsanalysen mit nicht stationären Zeitreihen auftreten können, ist Granger/Newbold (1974), dessen Titel »Spurious Regressions in Econometrics« schon das wesentliche Ergebnis solcher Regressionen aufzeigt. Ein Beispiel wird nach der Definition von Stationarität dargestellt.

Man unterscheidet schwache und strenge Stationarität. Strenge Stationarität liegt genau dann vor, wenn die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen  $Y(t) = Y(1), Y(2), \dots, Y(T)$  invariant in der Zeit ist. Es gilt in diesem Fall, dass eine Verschiebung der Variablen in der Zeit die gemeinsame Verteilung nicht verändert. Die Zufallsvariablen  $Y(t+1), \dots, Y(t+n)$  haben dann die gleiche gemeinsame Verteilung wie  $Y(t+1+c), \dots, Y(t+n+c)$ , wobei  $c$  eine positive Konstante ist.

Üblicherweise betrachtet man nur schwache Stationarität. Diese liegt dann vor, wenn Erwartungswert, Varianz und die Autokovarianzen der Verteilung der Zufallsvariablen für alle Zeitpunkte konstant sind. Formal heißt das:

$$(10) \quad \begin{aligned} E(Y_t) &= \mu_t = \mu = \text{konstant}, \forall t \\ \text{Var}(Y_t) &= \sigma_t^2 = \sigma^2 = \text{konstant}, \forall t \\ \text{Cov}(Y_t, Y_{t+j}) &= \sigma_{tj} = \sigma_j = \text{konstant}, \forall t, j \end{aligned}$$

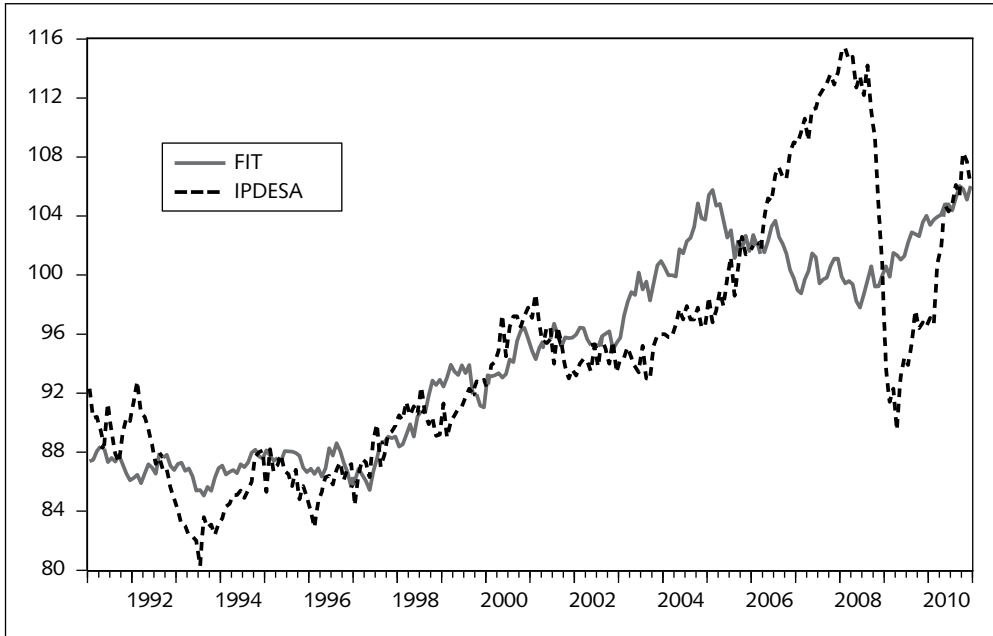
Die Autokovarianzen  $\text{Cov}(\cdot)$  hängen dabei nur von der Laglänge  $j$ , aber nicht von der Zeit ab. Im Falle der Normalverteilung ist schwache Stationarität gleichbedeutend mit strenger Stationarität, da die Verteilung durch die angegebenen Momente vollständig festgelegt ist. Im Falle von bedingter Heteroskedastizität (vgl. Kapitel I.2.1.3 und Kapitel VI) ist die bedingte Varianz nicht stationär. Allerdings kann die unbedingte Varianz durchaus stationär sein. Dies ist abhängig von den konkreten Parametern des Varianzprozesses. Im Folgenden widmet sich das Kapitel ausschließlich dem Fall eines stochastischen Prozesses mit nicht-stationärem Mittelwert. Abbildung 6 zeigt zwei Zeitreihen. Die eine Zeitreihe ist die saisonbereinigte deutsche Industrieproduktion (IPDESA). Die andere Zeitreihe ist eine mögliche erklärende Variable (FAKTOR).



**Abb. 6:** Deutsche Industrieproduktion (IPDESA), saisonbereinigt und mögliche erklärende Variable (FAKTOR), Zeitraum: Jan. 1991 bis Dez. 2010

Eine lineare Regression der Form  $IPDESA_t = \alpha + \beta \cdot FAKTOR_t + \varepsilon_t$  führt zu folgendem Ergebnis:

Dependent Variable: IPDESA Method: Least Squares Date: 07/27/11 Time: 16:22 Sample: 1991M01 2010M12 Included observations: 240				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	46.38365	2.495661	18.58572	0.0000
FAKTOR	0.444070	0.022792	19.48374	0.0000
R-squared	0.614647	Mean dependent var		94.57042
Adjusted R-squared	0.613028	S. D. dependent var		8.323732
S. E. of regression	5.177948	Akaike info criterion		6.134993
Sum squared resid	6381.053	Schwarz criterion		6.163998
Log likelihood	-734.1992	Hannan-Quinn criter.		6.146680
F-statistic	379.6163	Durbin-Watson stat		0.099157
Prob(F-statistic)	0.000000			



**Abb. 7:** Deutsche Industrieproduktion: Originalwerte (IPDESA) versus Schätzung (FIT), Zeitraum: Jan. 1991 bis Dez. 2010

Die Kennzahlen dieser Regression sehen auf den ersten Blick recht gut aus: Das um Freiheitsgrade korrigierte Bestimmtheitsmaß<sup>7</sup> »Adjusted R-squared« beträgt 0,613, die t-Werte der Parameter (t-Statistic) sind mit 18,59 und 19,48 sehr groß und zeigen damit hoch-signifikante Parameterschätzungen an.

Auch Abbildung 7 sieht sehr vielversprechend aus. Die Schätzwerte  $FIT_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \text{FAKTOR}_t$  weisen eine durchaus große Ähnlichkeit mit der Industrieproduktion auf. Tatsächlich sind die Schätzungen jedoch praktisch aussagegelos, da die erklärende Variable FAKTOR einen reinen Zufallsprozess darstellt, der per Zufallsgenerator erzeugt wurde. Die wirkliche Erklärungskraft dieser Variablen sieht man, wenn man statt der Niveauewerte die prozentualen ersten Differenzen der beiden Variablen ( $D\_IPDESA$ ,  $D\_FAKTOR$ ) aufeinander regressiert:

<sup>7</sup> Die unterschiedlichen Definitionen und Eigenschaften von Bestimmtheitsmaßen werden in Kapitel II (»Regressionsanalyse«) dargestellt.

Dependent Variable: D_IPDESA Method: Least Squares Date: 07/27/11 Time: 16:50 Sample (adjusted): 1991M02 2010M12 Included observations: 239 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000741	0.000991	0.747768	0.4553
D_FAKTOR	-0.025405	0.066813	-0.380249	0.7041
R-squared	0.000610	Mean dependent var		0.000699
Adjusted R-squared	-0.003607	S. D. dependent var		0.015200
S. E. of regression	0.015228	Akaike info criterion		-5.523048
Sum squared resid	0.054957	Schwarz criterion		-5.493956
Log likelihood	662.0042	Hannan-Quinn criter.		-5.511324
F-statistic	0.144589	Durbin-Watson stat		2.229162
Prob(F-statistic)	0.704101			

Nun zeigt sich, dass D\_FAKTOR tatsächlich nichts erklärt: das adjusted R-squared ist nahezu gleich null und der t-Wert des Parameters von D\_FAKTOR ist ebenfalls weit entfernt von einer möglichen Signifikanz.<sup>8</sup> Die schlechten Schätzzeigenschaften der ersten Gleichung lassen sich auch an dem niedrigen Wert des Durbin-Watson-Koeffizienten von 0.099 erkennen. Der Durbin-Watson Test untersucht anhand der Residuen der Schätzgleichung, ob die Fehlerterme eine Autokorrelation erster Ordnung aufweisen.<sup>9</sup> Positive Autokorrelation erster Ordnung bedeutet, dass die Residuen der Schätzgleichung häufig viele Perioden lang entweder nur positiv oder nur negativ sind. Abbildung 8 zeigt, dass dies für die erste Schätzung mit den Niveauewerten tatsächlich der Fall ist.

Die Residuen der Schätzgleichung weisen eine ausgeprägte Tendenz auf, lange Zeit im positiven bzw. negativen Bereich zu bleiben. Bei Fehlen von Autokorrelation erster Ordnung sollte der Durbin-Watson Wert nahe bei 2.0 liegen. Ein Wert nahe bei 0 wie im obigen Fall zeigt dagegen positive Autokorrelation erster Ordnung an. Dies ist eine typische Situation, wenn zwei nicht-stationäre Zeitreihen, die kein gemeinsames langfristiges Gleichgewicht aufweisen (d. h. Zeitreihen die nicht kointegriert sind), aufeinander regressiert werden. Bei einer korrekt durchgeführten Regressionsschätzung sollten die Fehlerterme hingegen einen reinen Zufallsprozess (= White Noise) darstellen.

Regressionen mit nicht-stationären und stationären Variablen lassen sich in Klassen einteilen, die eine Aussage über die Fehlerterme der jeweiligen Schätzgleichung zulassen.

8 Durch die Bereinigung um Freiheitsgrade kann das adjustierte R-squared auch negative Werte annehmen. Dies ist wie ein Wert von null zu interpretieren.

9 Der Durbin-Watson Test wird ausführlich in Kapitel II »Regressionsanalyse« dargestellt. Er ist allerdings nur dann anwendbar, wenn die Schätzgleichung keine verzögerten endogenen Variablen als erklärende Variablen auf der rechten Seite der Gleichung enthält. Das Modell darf also nur so aussehen:  $Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_t + \beta_2 \cdot X_{t-1} + \dots + \varepsilon_t$ . Der Vektor X darf dabei keine verzögerten Werte von Y enthalten. Bei Verwendung von verzögerten Y-Werten auf der rechten Seite muss der Test auf autokorrelierte Fehlerterme mit anderen Verfahren (z. B. Ljung-Box Q-Test, Breusch-Godfrey-Test, Durbin's h) untersucht werden. Der Ljung-Box Q-Test wird in Kapitel III dargestellt, der Breusch-Godfrey-Test in Kapitel II.