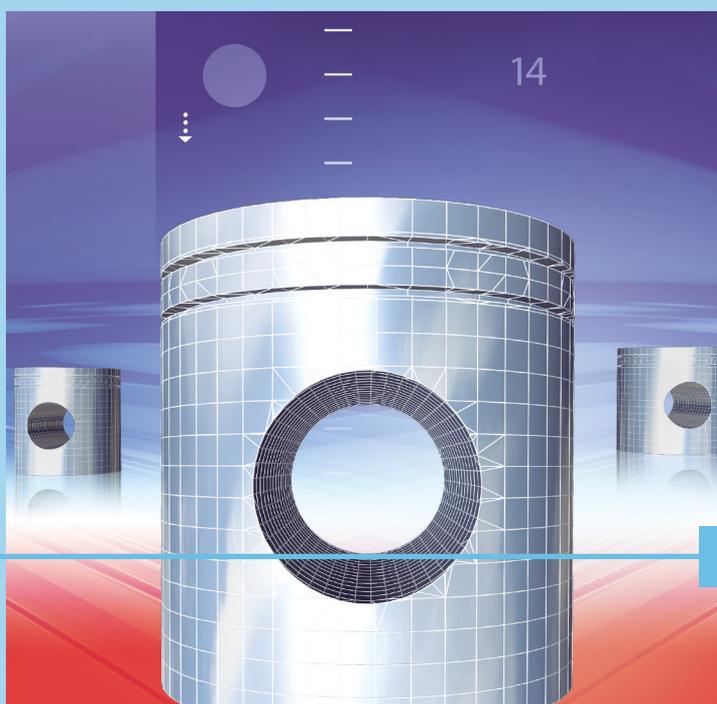


Frank Rieg  
Reinhard Hackenschmidt  
Bettina Alber-Laukant

Auf DVD  
Softwarevollversion Z88 Aurora  
und Buchbeispiele

# Finite Elemente Analyse für Ingenieure

Grundlagen und praktische Anwendungen  
mit Z88 Aurora



5., überarbeitete Auflage

HANSER

Frank Rieg  
Reinhard Hackenschmidt  
Bettina Alber-Laukant

## Finite Elemente Analyse für Ingenieure



### HINWEIS!

Zu diesem Buch gehört eine DVD.

Sollte diese DVD nicht beiliegen, können Sie sie unter [fachbuch@hanser.de](mailto:fachbuch@hanser.de) kostenlos anfordern.



### BLEIBEN SIE AUF DEM LAUFENDEN!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)



Frank Rieg  
Reinhard Hackenschmidt  
Bettina Alber-Laukant

# Finite Elemente Analyse für Ingenieure

Grundlagen und praktische Anwendungen mit Z88Aurora

5., überarbeitete Auflage

HANSER

## Die Autoren:

*Prof. Dr.-Ing. Frank Rieg*, Ordinarius, Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth

*Dipl.-Wirtsch.-Ing. Reinhard Hackenschmidt*, Akademischer Oberrat, Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth

*Dr.-Ing. Bettina Alber-Laukant*, Patentingenieurin, Akademische Rätin, Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth

## Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Print-ISBN 978-3-446-44283-2

E-Book-ISBN 978-3-446-44318-1

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Alle in diesem Buch enthaltenen Verfahren bzw. Daten wurden nach bestem Wissen dargestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen.

Aus diesem Grund sind die in diesem Buch enthaltenen Darstellungen und Daten mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autoren und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieser Darstellungen oder Daten oder Teilen davon entsteht.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2014 Carl Hanser Verlag München

[www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Dipl.-Ing. Volker Herzberg

Herstellung: Jörg Strohbach

Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Coverconcept: Marc Müller-Bremer, Rebranding, München, Germany

Titelillustration: Atelier Frank Wohlgemuth, Bremen

Coverrealisierung: Stephan Rönigk

Druck und Bindung: Kösel, Krugzell

Printed in Germany

# Vorwort zur fünften Auflage

Unser Ziel mit diesem Buch ist wie bereits in der ersten Auflage:

*Einem Studenten der Ingenieurwissenschaften ab dem 3. Semester und dem schon im Beruf stehenden Ingenieur ausgewählte Aspekte der Finite Elemente so zu vermitteln, dass er dieses Wissen sofort zur Lösung praktischer Probleme umsetzen kann.*

Deshalb sprechen wir schon im Buchtitel von Finite Elemente *Analyse* und nicht von der Finite Elemente Methode – weil dieses riesige Fachgebiet schon lange den etwas zweifelhaften Touch einer Methode hinter sich gelassen hat und heute *das* Ingenieurtool ist, um Tragwerke zu *analysieren*. Natürlich kann man mit diesem Verfahren viel mehr unternehmen, als nur Mechanik zu betreiben – Wärmeflüsse, Elektro- und Magnetfelder, ja eigentlich allgemein Differentialgleichungen und Randwertaufgaben für verschiedene Felder – das alles kann man heute damit lösen.

Aber begonnen hat alles mit der Berechnung von mechanischen Strukturen und wir wollen uns in diesem Werk daher auch auf lineare und nichtlineare Statik, stationäre Wärmeleitung und Eigenschwingungen beschränken. Sehr wesentlich scheint uns der Ingenieurspekt zu sein – er steht nicht umsonst im Buchtitel: Das Vorgehen wurde in den fünfziger Jahren einigermaßen „intuitiv“ von den Flugzeug-Ingenieuren für statische Berechnungen von Flugzeugstrukturen entwickelt. Es ist ein Verfahren von Ingenieuren für Ingenieure!

Wir gehen daher wie folgt vor: Nach einer wirklich einfachen Darstellung des grundlegenden Vorgehens werden wir die wichtigsten Punkte der Elastizitätstheorie, der Technischen Mechanik und der Thermodynamik, soweit sie die FEA betreffen, abhandeln, um mit diesem Wissen an die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrizen zu gehen. Dieses theoretische Wissen ist tatsächlich unabdingbar, um FE-Rechenprogramme gezielt und gekonnt einsetzen zu können. Sodann betrachten wir den Compilationsprozeß, die Speicherverfahren und das Lösen der Gleichungssysteme, um die Unbekannten zu berechnen.

Damit Sie nun Ihr Wissen praktisch umsetzen können, fügen wir dem Buch zwei FE-Programme auf DVD bei: Das vom Erstautor programmierte Open-Source Finite-Elemente-Programm für statische Berechnungen Z88® sowie das weit darüber hinausgehende und sehr komfortable Freeware Finite-Elemente-Programm Z88Aurora®, das dann auch nichtlineare Berechnungen, stationäre Wärmeflüsse und Eigenschwingungen beherrscht. Beides sind Vollversionen, mit der *beliebig große Strukturen* gerechnet werden können – die Grenzen werden nur durch Ihren Computer hinsichtlich Hauptspeicher und Plattenplatz und Ihr Vorstellungsvermögen gezogen.

Z88 und Z88Aurora kommen lauffertig für Windows, LINUX sowie Mac OS X. Bei Z88 liefern wir auch direkt die Quellen mit, sodass Sie die theoretischen Aspekte im Programmcode studieren und gegebenenfalls erweitern können. Natürlich können Sie so auch nachvollziehen, wie Speicherverfahren, Gleichungslöser usw. in der Rechenpraxis arbeiten. Z88 ist für den Anwender absolut transparent durch Ein- und Ausgabe mit Textdateien. Es ist also ein FEA-Programm im ganz klassischen und ursprünglichen Sinne. Und wir meinen: Nur mit einem solchen Programm, bei dem Sie jeden Zahlenwert noch selbst kontrollieren können und müssen, können Sie das Grundlegende lernen. Wenn Sie dann das grundlegende Vorgehen verstanden haben, können Sie mit Z88Aurora arbeiten, das bei uns am Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD mit Förderung durch die Oberfranken-Stiftung entwickelt wurde. Z88Aurora steht in *Look and Feel* den kommerziellen FEA-Programmen nicht nach und erlaubt ein sehr professionelles und zeitgemäßes Arbeiten, direkt von CAD-Daten ausgehend. Auf die bekannten kommerziellen FEA-Programme beziehen wir uns hier nicht, weil es davon kostenlos nur sehr stark eingeschränkte Versionen hinsichtlich der Strukturgrößen gibt, mit denen Sie mehrere der folgenden Beispiele gar nicht rechnen könnten. Und Quellcodes könnten wir dazu auch nicht präsentieren. Im späteren Buchteil kommen viele Praxisbeispiele, die Sie dann nachrechnen sollten. Die DVD enthält natürlich auch die Eingabedateien für alle Beispiele. Die Beispiele sind so gewählt, dass sie schrittweise die verschiedenen Aspekte der Berechnung von Tragwerken und mechanischen Strukturen erläutern.

Unser Finite Elemente Analyse Buch wurde anlässlich der vierten Auflage vollständig überarbeitet: Der Theorie teil wurde gegenüber der dritten Auflage hinsichtlich Schalenelementen (von F. Rieg), nichtlinearer Berechnung (von Dr.-Ing. C. Wehmann), stationärer Wärmeleitung (von M. Frisch, M.Sc.) und Eigenschwingungen (von Dr.-Ing. M. Neidnicht) erweitert. Der Beispielteil wurde stark erweitert und aktualisiert. Unsere Mitarbeiter M. Frisch, M.Sc., Dr.-Ing. M. Neidnicht, Dipl.-Ing. F. Nützel, Dr.-Ing. C. Wehmann und Dipl.-Ing. M. Zimmermann übernahmen das Programmieren und Testen von Z88Aurora Version 2b und lasen Korrektur. Ihnen allen sei herzlich gedankt.

Dem Hanser-Verlag danken wir für die wie immer vorbildliche Ausführung.

Wir dürfen uns ganz herzlich bei unseren Lesern bedanken, die nach wenigen Jahren eine fünfte Auflage fordern. Auch die Arbeit an diesem Buch war uns wieder ein Vergnügen und wir hoffen, dass Sie großen Nutzen aus diesem Buch ziehen werden.

*Frank Rieg, Reinhard Hackenschmidt und Bettina Alber-Laukant*

Bayreuth, im Juni 2014

# Inhalt

	<b>Vorwort zur fünften Auflage</b> .....	<b>v</b>
<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das grundsätzliche Vorgehen</b> .....	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Etwas Elastizitätstheorie</b> .....	<b>23</b>
3.1	Verschiebungen und Verzerrungen .....	23
3.1.1	Beim Zugstab .....	23
3.1.2	Bei der Scheibe .....	25
3.1.3	Im Raum .....	31
3.1.4	Bei der Platte .....	32
3.2	Spannungs-Dehnungs-Relationen .....	34
3.3	Grundlagen der thermo-mechanischen Beanspruchung .....	44
3.4	Grundlagen Eigenschwingung .....	47
3.5	Grundlagen nichtlinearer Berechnungen .....	50
<b>4</b>	<b>Finite Elemente und Elementmatrizen</b> .....	<b>63</b>
4.1	Grundlagen von Element-Steifigkeits-Matrizen .....	65
4.2	Materialmatrizen .....	69
4.3	B-Matrix .....	70
4.4	Formfunktionen .....	71
4.5	Integration .....	81
4.6	Das Aufbringen von Lasten, Lastvektoren .....	88
4.6.1	Das grundsätzliche Vorgehen .....	88
4.6.2	Plattenelemente .....	91
4.6.3	Volumenelemente .....	93
4.6.4	Ebener und axialsymmetrischer Spannungszustand .....	104
4.6.5	Streckenlasten bei Balken .....	106
4.6.6	Gerbergelenke bei Balken .....	108
4.7	Eine fertige Element-Steifigkeitsroutine .....	112

4.8	Einige Bemerkungen zur Modellbildung .....	121
4.8.1	Wahl der Elementtypen .....	121
4.8.2	Kunststoffe und Materialgesetze .....	129
4.8.3	Strukturoptimierung .....	130
4.9	Einige Bemerkungen über Schalen .....	134
4.10	Elementmatrizen für Thermoanalyse .....	148
4.11	Elementmatrizen für Schwingungen .....	150
4.12	Elementmatrizen der nichtlinearen Finite Elemente Analyse .....	152
<b>5</b>	<b>Compilation, Speicherverfahren und Randbedingungen .....</b>	<b>163</b>
5.1	Compilation .....	163
5.2	Speicherverfahren .....	174
5.2.1	Die Bandspeicherung .....	176
5.2.2	Das Skyline-Speicherverfahren .....	180
5.2.3	Das Jennings-Speicherverfahren .....	182
5.2.4	Speicherung der Nicht-Nullelemente .....	190
5.2.5	Zusammenfassung der Speicherverfahren .....	196
5.3	Randbedingungen .....	197
5.3.1	Einzel-Kräfte und Einzel-Verschiebungen .....	197
5.3.2	Flächenlasten bei Platten .....	200
5.3.3	Lagerungen von Platten .....	202
5.3.4	Randbedingungen bei Temperaturanalysen .....	203
5.3.5	Randbedingungen bei Schwingungen .....	206
5.3.6	Randbedingungen bei der nichtlinearen Finite Elemente Analyse ..	207
<b>6</b>	<b>Gleichungslöser .....</b>	<b>209</b>
6.1	Direkte Verfahren .....	210
6.1.1	Das Cholesky-Verfahren .....	212
6.2	Kondition und Skalierung .....	214
6.3	Iterative Verfahren .....	223
6.3.1	Das Jacobi-Verfahren .....	225
6.3.2	Das Gauß-Seidel-Verfahren .....	226
6.3.3	Das SOR-Verfahren und das JOR-Verfahren .....	226
6.3.4	Das Verfahren der Konjugierten Gradienten .....	227
6.3.5	Das Verfahren der Konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung	229
6.4	Solver für thermomechanische Probleme .....	244
6.5	Solver für Schwingungsprobleme .....	244
6.6	Gleichungslöser für die nichtlineare Finite Elemente Analyse .....	255
<b>7</b>	<b>Spannungen und Knotenkräfte .....</b>	<b>259</b>
7.1	Spannungen .....	259
7.2	Vergleichsspannungen .....	266
7.3	Knotenkräfte .....	273

<b>8</b>	<b>Netzgenerierung krummlinig berandeter Finiter Elemente</b> .....	<b>277</b>
8.1	Vorgehensweise .....	277
8.2	Mathematische Grundlagen .....	279
8.3	Beschreibung eines einfachen Netzgenerators .....	283
<b>9</b>	<b>Z88: Grundlagen</b> .....	<b>291</b>
9.1	Allgemeines .....	291
9.1.1	Die Z88-Element-Bibliothek im Überblick .....	292
9.2	Das Open Source FE-Programm Z88 .....	304
9.2.1	Die Z88-Module im Überblick .....	304
9.2.2	Dynamischer Speicher Z88 .....	307
9.2.3	Die Ein- und Ausgabe von Z88: .....	310
9.3	Das Freeware FE-Programm Z88Aurora .....	314
9.3.1	Die Z88Aurora-Module im Überblick .....	314
9.3.2	Speicherbedarf Z88Aurora .....	317
9.3.3	Die Ein- und Ausgabe von Z88Aurora .....	318
<b>10</b>	<b>Die Z88-Module</b> .....	<b>321</b>
10.1	Der lineare Solver Z88R .....	321
10.1.1	Z88R: Der direkte Cholesky Solver .....	322
10.1.2	Z88R: Der Sparsematrix Solver .....	323
10.1.3	Z88R: Der direkte Sparsematrix Solver in Z88Aurora .....	325
10.1.4	Welchen Solver nehmen? .....	326
10.1.5	Erläuterungen zur Spannungsberechnung .....	326
10.1.6	Erläuterungen zur Knotenkraftberechnung .....	327
10.2	Der Netzgenerator Z88N .....	327
10.3	Der Superelementgenerator in Z88Aurora .....	330
10.3.1	Verwendung von Z88N in Z88Aurora .....	330
10.3.2	Tetraederverfeinerer Z88MTV .....	331
10.3.3	2D-Schalenaufdicker Z88MVS .....	333
10.4	Das OpenGL Plotprogramm Z88O bei Z88 V14 OS bzw. der Postprozessor von Z88Aurora .....	333
10.5	Der DXF-Konverter Z88X .....	337
10.6	Der 3D-Konverter Z88G .....	346
10.7	Der Ansys-Konverter Z88ASY in Z88Aurora .....	349
10.8	Der Abaqus-Konverter Z88INP in Z88Aurora .....	351
10.9	Das Cuthill-McKee Programm Z88H .....	352
10.10	Der Step-Import Z88GEOCON (Step) in Z88Aurora .....	354
10.11	Der Stl-Konverter Z88GEOCON (Stl) in Z88Aurora .....	356
10.12	Der Tetraedervernetzer in Z88Aurora .....	357
10.13	Das Pickingmodul in Z88Aurora .....	358
10.14	Die Materialdatenbank in Z88Aurora .....	360
10.15	Die Randbedingungen in Z88Aurora .....	360

10.16	Die Benutzerunterstützung Spider in Z88Aurora .....	361
10.17	Das Thermomodul in Z88Aurora .....	362
10.18	Das Eigenschwingungsmodul in Z88Aurora .....	365
10.19	Das Modul Z88NL für nichtlineare Berechnungen in Z88Aurora .....	368
<b>11</b>	<b>Eingabe-Dateien erzeugen .....</b>	<b>373</b>
11.1	Allgemeines .....	373
11.2	Allgemeine Strukturdaten Z88I1.TXT .....	375
11.3	Randbedingungsdatei Z88I2.TXT .....	376
11.4	Flächenlast-Datei Z88I5.TXT .....	379
11.5	Materialsteuerdatei Z88MAT.TXT .....	384
11.6	Materialdatei *.TXT .....	385
11.7	Elementparameterdatei Z88ELP.TXT .....	385
11.8	Integrationsordnungs-Datei Z88INT.TXT .....	387
11.9	Netzgenerator-Datei Z88NL.TXT .....	388
11.10	Solversteuerdatei Z88MAN.TXT .....	392
11.11	Vergleich der Z88-Dateiformate .....	395
<b>12</b>	<b>Die Finiten Elemente von Z88 und Z88Aurora .....</b>	<b>397</b>
12.1	Hexaeder Nr.1 mit 8 Knoten .....	397
12.2	Balken Nr.2 mit 2 Knoten im Raum .....	400
12.3	Scheibe Nr.3 mit 6 Knoten .....	402
12.4	Stab Nr.4 im Raum .....	403
12.5	Welle Nr.5 mit 2 Knoten .....	404
12.6	Torus Nr.6 mit 3 Knoten .....	406
12.7	Scheibe Nr.7 mit 8 Knoten .....	407
12.8	Torus Nr.8 mit 8 Knoten .....	409
12.9	Stab Nr.9 in der Ebene .....	411
12.10	Hexaeder Nr.10 mit 20 Knoten .....	413
12.11	Scheibe Nr.11 mit 12 Knoten .....	416
12.12	Torus Nr.12 mit 12 Knoten .....	418
12.13	Balken Nr.13 in der Ebene .....	420
12.14	Scheibe Nr.14 mit 6 Knoten .....	421
12.15	Torus Nr.15 mit 6 Knoten .....	423
12.16	Tetraeder Nr.16 mit 10 Knoten .....	426
12.17	Tetraeder Nr.17 mit 4 Knoten .....	429
12.18	Platte Nr.18 mit 6 Knoten .....	431
12.19	Platte Nr.19 mit 16 Knoten .....	433
12.20	Platte Nr.20 mit 8 Knoten .....	436
12.21	Schale Nr.21 mit 16 Knoten .....	438
12.22	Schale Nr.22 mit 12 Knoten .....	440
12.23	Schale Nr.23 mit 8 Knoten .....	442

12.24	Schale Nr.24 mit 6 Knoten .....	444
12.25	Element / Solverübersicht Z88Aurora V2 .....	446
<b>13</b>	<b>Beispiele .....</b>	<b>447</b>
13.1	Schraubenschlüssel aus Scheiben Nr. 7 .....	454
13.1.1	Mit Z88V14 .....	455
13.1.2	Mit Z88AuroraV2 .....	463
13.2	Kranträger aus Stäben Nr. 4 .....	473
13.2.1	Mit Z88V14 .....	474
13.2.2	Mit Z88AuroraV2 .....	479
13.3	Getriebewelle mit Welle Nr. 5 .....	484
13.3.1	Mit Z88V14 .....	486
13.3.2	Mit Z88AuroraV2 .....	489
13.4	Biegeträger mit Balken Nr. 13 .....	493
13.4.1	Mit Z88V14 .....	494
13.4.2	Mit Z88AuroraV2 .....	498
13.5	Plattensegment aus Hexaedern Nr. 1 und Nr. 10 .....	502
13.5.1	Mit Z88V14 .....	503
13.5.2	Mit Z88AuroraV2 .....	509
13.6	Rohr unter Innendruck, Scheibe Nr. 7 .....	512
13.6.1	Mit Z88V14 .....	513
13.6.2	Mit Z88AuroraV2 .....	520
13.7	Rohr unter Innendruck, Tori Nr. 8 .....	522
13.7.1	Mit Z88V14 .....	523
13.7.2	Mit Z88AuroraV2 .....	529
13.8	Zweitaktmotor-Kolben .....	531
13.8.1	Mit Z88V14 .....	532
13.8.2	Mit Z88AuroraV2 .....	536
13.9	RINGSPANN-Scheibe und Tellerfeder .....	541
13.9.1	Mit Z88V14 .....	543
13.9.2	Mit Z88AuroraV2 .....	546
13.10	Flüssiggas-Tank .....	548
13.10.1	Mit Z88V14 .....	548
13.10.2	Mit Z88AuroraV2 .....	552
13.11	Motorrad-Kurbelwelle .....	554
13.11.1	Mit Z88V14 .....	556
13.11.2	Mit Z88AuroraV2 .....	561
13.12	Drehmoment-Messnabe .....	565
13.12.1	Mit Z88V14 .....	566
13.12.2	Mit Z88AuroraV2 .....	567
13.13	Ebene Rahmen .....	568
13.13.1	Mit Z88V14 .....	569
13.13.2	Mit Z88AuroraV2 .....	589
13.14	Zahnrad .....	591

13.14.1	Mit Z88V14 .....	592
13.14.2	Mit Z88AuroraV2 .....	597
13.15	3D-Schraubenschlüssel .....	601
13.15.1	Mit Z88V14 .....	601
13.15.2	Mit Z88AuroraV2 .....	613
13.16	Kraftmesselement, Scheiben Nr. 7 .....	615
13.16.1	Mit Z88V14 .....	615
13.16.2	Mit Z88AuroraV2 .....	625
13.17	Kreisplatte, Platten Nr. 20 .....	626
13.17.1	Mit Z88V14 .....	628
13.17.2	Mit Z88AuroraV2 .....	632
13.18	Rechteckplatte mit 16-Knoten Platten Nr. 19 .....	633
13.18.1	Mit Z88V14 .....	633
13.18.2	Mit Z88AuroraV2 .....	640
13.19	Viertaktmotor-Kolben mit Tetraedern Nr. 16 .....	641
13.19.1	Mit Z88V14 .....	642
13.20	Automotor-Lüfterrad .....	649
13.20.1	Mit Z88V14 .....	651
13.20.2	Mit Z88AuroraV2 .....	652
13.21	Dieselskolben .....	655
13.21.1	Mit Z88V14 .....	656
13.21.2	Mit Z88AuroraV2 .....	658
13.22	Berechnung einer Formzahl .....	659
13.22.1	Mit Z88V14 .....	660
13.22.2	Mit Z88AuroraV2 .....	665
13.23	Zahnfußbeanspruchung .....	666
13.23.1	Mit Z88V14 .....	668
13.23.2	Mit Z88AuroraV2 .....	670
13.24	Vierkantrohr, Schale Nr. 24 .....	672
13.24.1	Mit Z88V14 .....	674
13.24.2	Mit Z88AuroraV2 .....	675
13.25	U-Boot aus Schalen Nr. 22 .....	678
13.26	Zahnrad aus Tetraedern Nr. 17 .....	684
13.27	Schwingende Trommel .....	687
13.28	Modalanalyse Kurbelwelle .....	691
13.29	Thermomechanische Analyse eines Löffels .....	694
13.30	Thermische Analyse eines Viertakt-Motorkolbens .....	700
13.31	Nichtlineare Berechnung einer Tellerfeder .....	704
13.32	Nichtlineare Berechnung eines Scharniers .....	708
<b>14</b>	<b>Quellen und weiterführende Literatur .....</b>	<b>713</b>
<b>15</b>	<b>Index .....</b>	<b>719</b>

Die DVD zum Buch *Finite Elemente Analyse für Ingenieure* enthält die Programmversionen Z88V14OS und Z88Aurora V2 einschließlich Beispieldaten zur Berechnung für beide Versionen. Der Inhalt der DVD ist wie folgt gegliedert:

/z88_beispiele_z88aurora/:	Beispiele für Z88Aurora V2
/z88_beispiele_z88v14os/:	Beispiele für Z88V14OS
/z88aurora/:	Installer und Dokumentation Z88Aurora V2
/z88v14os/:	Entpackte Verzeichnisstruktur Z88V14OS

## Installation von Z88V14OS

Z88V14OS liegt als ready-to-run Version sowie als Version zum selbst compilieren im Verzeichnis /z88v14os/ für folgende Betriebssysteme bei:

- 32 BIT Windows
- 64 BIT Windows
- 32 BIT LINUX
- 64 BIT LINUX
- 64 BIT Mac OS X

Die ausführliche Installations- bzw. Compilationsanleitung finden Sie im Dokument *z88mang.pdf* im Verzeichnis /z88v14os/docu/.

## Installation von Z88Aurora V2

Z88Aurora V2 liegt im Verzeichnis /z88aurora/ als Installer für

- 32 BIT Windows,
- 64 BIT Windows und
- 64 BIT Mac OS X

und als TAR.GZ für

- 64 BIT LINUX Suse 12.1, 12.2,
- 64 BIT LINUX Ubuntu 11.04, 12.04, 14.04

Bitte beachten Sie, dass unter UNIX die Schreibrechte der Beispiele angepasst werden müssen.

Die ausführlichen Installationsanleitungen finden Sie für das entsprechende Betriebssystem im Verzeichnis /z88aurora/installer/.

Bitte beachten Sie, dass Sie für Mac OS X das GTK+-Paket GTK+4Z88.dmg aus dem Verzeichnis /z88aurora/installer/macosx/ zuerst installieren müssen.

Das Theoriehandbuch und das Benutzerhandbuch sowie FAQs zu Z88Aurora V2 sind im Verzeichnis /z88aurora/docu/ enthalten.

## Software Updates

Der Stand der DVD ist der 25. Juni 2014.

Auf unserer Internetseite [www.z88.de](http://www.z88.de) finden Sie ggf. Updates und Fehlerkorrekturen.



# 1

## Einleitung

Während viele Vorgehensweisen in der Technik oft jahrhundertalt sind, und beispielsweise die Elastizitätstheorie praktisch geschlossen im 19. Jahrhundert entwickelt wurde, entstand die sog. Methode der Finiten Elemente erst mit dem Aufkommen der ersten Digitalrechner in Deutschland, in den Vereinigten Staaten und in England während des Zweiten Weltkriegs. Diese ersten Computer, der deutsche *Zuse Z3* von 1941, aber besonders der amerikanische *Harvard Mark I*, dienten zum Berechnen von Geschosßbahnen für die Artillerie, vgl. /33/. Gleichzeitig entstand ein neuer Typ von Flugzeug, der düsengetriebene Jet. Dessen bisher nicht gekannte Geschwindigkeiten sorgten für ganz neue Probleme – neuartige Tragflügelkonzepte wie den Pfeilflügel, extrem leichte und dennoch sehr stabile Zellen, die auch in großen Höhen nicht versagen und die Strahltriebwerke selbst.

Es kam daher nicht von ungefähr, dass in den 50er Jahren bei *Boeing* in Seattle die Ingenieure *J. Turner* und *R. Clough* die Matrizenkraftmethode und die Matrizenverschiebungsmethode für die statische Berechnung von Zellen und Flügeln entwickelten. Schon Ende der 40er Jahre hatte *J. Argyris* (der später an der TU Stuttgart wirkte und einer der Väter der Finite Elemente Methode ist) in England nachgewiesen, dass man Kontinua durch Zerlegen in kleinere Teilbereiche in vereinfachter Form beschreiben kann. Dem gingen die Überlegungen von u. a. *Hrenikoff* voraus, Kontinua in eine Anordnung von Stäben bzw. Balken zu zerlegen, um damit ebene Spannungszustände und Plattenprobleme abzubilden – in der Literatur „Framework method“ oder „Gitterrost-Verfahren“ genannt. Der erste, der den Begriff *Finite Elemente Methode* auf einer Konferenz öffentlich benutzte, scheint *R. Clough* in 1960 gewesen zu sein.

Wir deuteten schon oben an, dass es ursprünglich ein *Matrizenkraftverfahren* und ein *Matrizenverschiebungsverfahren* gegeben hat. Während bei dem Ersten die gesuchten Unbekannten die Kräfte sind – eigentlich das Vorgehen, das auch in der klassischen Technischen Mechanik üblich ist – sind die Unbekannten beim zweiten Vorgehen die Verschiebungen des Systems – auf den ersten Blick eher ungewöhnlich. Lange wurde in Praxis und Wissenschaft darüber gestritten, welche von beiden Vorgehensweisen nun die bessere sei. Heute ist diese Frage entschieden: Alle Großprogrammsysteme arbeiten ausschließlich nach dem Verschiebungsverfahren, weil es sich viel einfacher und geradliniger schematisieren und programmieren lässt.

In der Anfangszeit konnten nur wenige „Privilegierte“ überhaupt Finite Elemente Berechnungen ausführen, denn nur sie hatten Zugang zu einem Großcomputer, der damals für die meisten Universitäten und Firmen vollkommen unbezahlbar war. Als der Erstautor 1978 seine

Diplomarbeit, die Berechnung einer Rennwagenkarosserie für die Fa. Porsche mit der Finite Elemente Methode, anfertigte, da stand wenigstens ein brauchbares FE-Programm, das *SAP IV von Wilson* und *Bathe*, zur Verfügung. Es lief im Batchmode auf der für die damalige Zeit sehr großen Computeranlage der TH Darmstadt, einer IBM 370/168. Die Eingabedaten wurden nicht etwa an einem Terminal eingegeben, sondern auf Lochkarten, die man mit einem IBM-Lochkartenstanzer selbst lochen musste. Irgendwann war der Eingabedatensatz fertig gelocht, und man konnte ihn im Rechenzentrum abgeben. Nachts – und zwar nur nachts wegen der „enormen“ Kernspeicheranforderung von rd. 700 KByte – wurde dann *SAP IV* („Structural Analysis Program“) gestartet und man konnte vielleicht am nächsten Tag die Ergebnisse auf zentimeterdicken Papierstapeln per Schnelldrucker gedruckt, abholen. Interaktive Grafik? Völlig unbekannt. Plotten auf Papier konnte man, immerhin, aber dazu war ein weiteres Programm *SAPOST* nötig, das seine Plotanweisungen über Lochkarten bekam.

Längst ist es anders geworden, und wenn man heute Bilder von Mainframes selbst der frühen 80er Jahre betrachtet, dann meint man, diese Bilder wären auf einem anderen Stern aufgenommen. Gerade der *Personal Computer* hat hier in den 80er Jahren Bahnbrechendes geleistet. Schon in der Mitte der 80er Jahre konnte man ganz beachtliche FE-Strukturen mit PCs /27/ berechnen, wobei die Grenze damals bei einem nutzbaren Hauptspeicher von ungefähr 500 KByte lag – diktiert durch DOS. In 1985 startete der Erstautor mit der Entwicklung seines FE-Programms *Z88* auf einem IBM AT, damals noch als FORTRAN-Version /28/. Anfang der 90er Jahre zeichnete sich der Siegeszug von Windows mit der Version 3.0 ab, und der Erstautor schrieb das bisher ausschließlich in FORTRAN 77 codierte *Z88* komplett in C um /15/, weil man damals nur mit der Programmiersprache C vernünftig Windows-Programme erstellen konnte.

Die Situation heute kennt jeder: Jeder Billig-PC vom Lebensmittel-Discounter hat unendlich mehr Power – und zwar in Zehnerpotenzen gerechnet – als die IBM 370 Mainframe vor über 40 Jahren, und jeder, wirklich jedermann, kann heute umfangreiche Finite Elemente Berechnung auf seinem PC zuhause durchführen.

Wie wir im zweiten Kapitel sehen werden, ist die Methode der Finiten Elemente – oder nach unserer Meinung besser *Finite Elemente Analyse*, denn man rechnet etwas nach, man analysiert – im Gegensatz zum methodischen Konstruieren, das eine Synthese ist – im Prinzip außerordentlich einfach! Das Besondere daran ist eigentlich nur das streng formalisierte Vorgehen, was so geeignet für den Computereinsatz ist. Wir kommen im zweiten Kapitel bei der Vorstellung des grundlegenden Vorgehens ganz bewusst von der Elastostatik her und arbeiten zunächst nur mit Stäben und Balken. Stäbe und Balken sind aber natürlich keine 2D- bzw. 3D-Kontinua, und mancher Leser wird darüber die Nase rümpfen und den gezeigten Weg für dilettantisch halten.

Aber halt – um das grundlegende Vorgehen des *Matrizenverschiebungsverfahrens* zu zeigen, sind diese einfachen (Struktur-) Elemente tatsächlich sehr geeignet. Denn Finite Elemente für den ebenen Spannungszustand, den ebenen Verzerrungszustand, den axialsymmetrischen Spannungszustand, für die Plattenbiegung und für den räumlichen Spannungszustand – um die wichtigsten zu nennen – werden ganz genauso ins Verfahren integriert! Tatsächlich sind auch alle Computerroutinen für das Aufstellen von Element-Steifigkeitsmatrizen ganz ähnlich aufgebaut, wie der Leser jederzeit bei unserem Buch anhand der beigefügten Programmquellen für *Z88* in C nachprüfen kann. Vergleichen Sie beispielsweise die Subroutine *SHEI88.C* für krummlinige 8-Knoten-Serendipity-Scheiben und -Tori mit der Rou-

tine *HEXA88.C* für krummlinige 20-Knoten-Serendipity Hexaeder für den allgemeinen räumlichen Spannungszustand.

An dem Wort Matrizenverschiebungs-Verfahren erkennt man übrigens alle relevanten Aspekte: Wir haben es mit teilweise riesigen *Matrizen* zu tun, es werden *Verschiebungen* berechnet, und zwar mit einem schematisierten Verfahren.

Sie ahnen es schon: Man kann sich diesem Verfahren entweder von der Ingenieursseite – wie wir es im zweiten Kapitel unternehmen – oder von der streng mathematischen Seite her nähern. Welchen Weg man wählt, hängt sicher vom eigenen Werdegang und den eigenen Vorkenntnissen ab, aber auch, welches Ziel man eigentlich verfolgen will. Da das Verfahren der Finiten Elemente von Ingenieuren für das Lösen von Ingenieursproblemen entwickelt wurde, halten wir es für angemessen, das Grundlegende ebenfalls aus Ingenieurssicht herzuleiten. Das hat außerdem den Vorteil, dass der Leser außer den üblichen Mathematikkenntnissen eines Abiturienten nur noch zusätzlich Grundkenntnisse der Matrizenrechnung haben sollte. Was allerdings unverzichtbar ist, ist solides Wissen auf dem Gebiet der „starren“ Statik und der Elastostatik. Wer hier nicht sattelfest ist, wird am Arbeiten mit jedwedem FE-Programm – nicht nur mit Z88 oder Z88Aurora – sehr bald auf die Nase fallen und sich auch gegebenenfalls den Hals brechen. Warum? Weil es beim Arbeiten mit der Finite Elemente Analyse eigentlich zwei Hindernisse gibt – und die sind systemimmanent. Die erste Falle: Das eigentliche Erzeugen des Finite Elemente Netzes – wie grob oder wie fein, welche Elementtypen – das ist sehr viel Erfahrung und Training. Die zweite Falle: Die Wahl der Randbedingungen, also wie und wo Lager anbringen, Kräfte aufgeben und dergleichen. Auch hier ist Erfahrung im Spiel, aber zunächst sind solide Mechanikkenntnisse gefragt: Ein statisch unterbestimmtes System bricht auch beim teuersten Rechenprogramm in sich zusammen.

Aber auch für Ingenieure kann das Herangehen an die Finite Elemente Analyse aus streng mathematischer Sicht durchaus sehr spannend und sinnvoll sein. Tatsächlich sind elastostatische Probleme durch Extremalprinzipien darstellbar, z. B. durch das Prinzip vom Minimum der gesamten potentiellen Energie: Unter allen Verschiebungszuständen, die den kinematischen Randbedingungen genügen, minimiert der tatsächliche Gleichgewichtszustand die potentielle Energie. Diese Funktionale der potentiellen Energie, die sich für Stäbe, Balken, Torsionsstäbe, Scheiben, Platten etc. aufstellen lassen, müssen also stationär werden. Das kann mit der Methode von *Ritz* erfolgen. Und die gewählten Funktionen des Ritz'schen Verfahrens sind durchaus mit den Ansatz- bzw. Formfunktionen der Finiten Elemente Analyse gedanklich verwandt. Eine der herausragenden Quellen für die Herleitung der diversen Elementsteifigkeitsmatrizen über Funktionale ist das Buch von *Schwarz* /6/, das dem mathematisch interessierten Leser sehr empfohlen werden kann.

Allerdings möchten wir wieder daran erinnern, dass man sich die Finite Elemente Analyse nicht durch theoretische Betrachtungen allein erschließen kann. Nur durch umfangreiche Übung und Arbeiten am Computer wird man es auf diesem Gebiet zu einer gewissen Meisterschaft bringen. Es erscheint uns daher wichtig, dass Sie die Beispiele des Buches selbst nachvollziehen, sinnvoll abändern und ergänzen – und zwar am Computer. Daher haben wir die folgenden theoretischen Kapitel relativ kurz gehalten, damit Sie möglichst bald an die praktischen Aspekte kommen. Wo wir allerdings der Meinung waren, dass bei anderen Autoren bestimmte Fragen, z. B. die Elastizitätstheorie, eher etwas zu kurz kommen, haben wir bewusst keine Kürzungen in Kauf genommen.

Dieses von uns sehr empfohlene Üben am Computer können Sie mit den beiden von uns mitgelieferten Programmen Z88 Version 14 und Z88Aurora Version 2 vornehmen. Z88 begleitet dieses Buch seit der ersten Auflage und kommt mit allen C-Programmquellen sowie *nmake*-Files für Windows Visual Studio 2008 und *make*-Files für LINUX und Mac OS X. Sie können so den Quellcode studieren und ggf erweitern oder abändern, was, wenn man dem theoretischen Unterbau der FEA wirklich verstehen will, äußerst sinnvoll ist. Zum reinen Durcharbeiten unserer vielen Beispiele brauchen Sie sich selbstverständlich nicht mit den Interna der Programmierung zu befassen; Z88 steht passend für die verschiedenen Betriebssysteme ladefertig auf der DVD, und dazu gehört ein etwa 200-seitiges Handbuch im PDF-Format, dem Sie Hinweise zur Installation und zum Betrieb entnehmen können. Eine Kurzfassung der Bedienungsanleitung finden Sie für einen ersten Start hier in den Kapiteln 9 und 10. Z88 ist ein ganz klassisches und ursprüngliches FE-Programm, das über Ein- und Ausgabedateien gesteuert wird. Wie alle derartigen klassischen Programme ist es zum Studium des grundlegenden Vorgehens sehr geeignet – aber in der täglichen Arbeit etwas hölzern und nicht wirklich komfortabel.

Daher kamen unsere ehemaligen Mitarbeiter Dr.-Ing. Bernd Roith, Dr.-Ing. Alexander Troll und Prof. Dr.-Ing. Martin Zimmermann in 2009 auf die Idee, auf die Strukturen des oben genannten Z88 aufbauend einen sehr zeitgemäße Bedienoberfläche mit Namen Z88Aurora zu schaffen, deren besonderer Fokus darauf liegt, direkt CAD-Dateien im STEP- oder STL-Format einzulesen, das Netz zu erzeugen und sodann interaktiv mit Randbedingungen und Materialien versehen zu können. Sehr schnell schlossen sich weitere Mitarbeiter des Lehrstuhls den Arbeiten an. Im Juni 2010 kam diese erste Version Z88Aurora heraus und wurde sofort ein voller Erfolg. Sehr bald begann Dr.-Ing. Bernd Roith mit den Arbeiten an der Nachfolgeversion; seine Nachfolge trat Dipl.-Ing. Markus Zimmermann an, der das System in seiner jetzigen Version 2 zusammen mit Dr.-Ing. B. Alber-Laukant, M. Frisch M.Sc., Dr.-Ing. M. Neidnicht, Dipl.-Ing. F. Nützel, Dr.-Ing. C. Wehmann und F. Rieg weitgehend gestaltet hat. Sie werden diese neue Version 2 von Z88Aurora als sehr angenehm und intuitiv im Umgang empfinden, wozu auch ein einmaliges Feature beiträgt, die sog. *Spider-Help* von Dr.-Ing. B. Alber-Laukant und Dr.-Ing. Bernd Roith. *Spider-Help* führt Sie durch den Workflow einer Finite Elemente Analyse.

Es war sofort klar, dass wir diese Neuentwicklung von Z88Aurora ab der vierten Auflage unseres FEA-Buchs integrieren mussten; obwohl wir Z88Aurora V2, das Sie auf der DVD finden, sehr umfangreichen Tests unterzogen haben, wissen Sie, dass Software nie fehlerfrei sein kann. Wenn Sie also Fehler oder Unregelmäßigkeiten entdecken, zögern Sie nicht, uns zu benachrichtigen. Oder schauen Sie auf unserer Internetseite [www.z88.de](http://www.z88.de), ob es inzwischen vielleicht Programm-Updates gibt. Auf unserer Internetseite werden Sie auch die Versionen für LINUX und Mac OS X sowie die englische Programmversion finden.

Und nun: Beginnen Sie mit dem *grundsätzlichen Vorgehen!*

# 2

## Das grundsätzliche Vorgehen

Wir werden nun in ganz kurzer Form das Grundlegende der *Finite Elemente Analyse* zeigen und werden auch ganz bewusst eine Reihe von Sachverhalten einfach annehmen, ohne sie zunächst herzuleiten. So behält man den Überblick und sieht nach der Lektüre weniger Seiten, wie einfach an sich das Vorgehen ist. Dass dahinter oft anspruchsvolle Theorien und mathematische Verfahren lauern, sei nicht verschwiegen, aber das werden wir dann, nachdem wir den Gesamtüberblick gewonnen haben, ganz entspannt in den Kapiteln 3 bis 8 betrachten – wobei man diese Kapitel tatsächlich für eine erste Lektüre überspringen kann. Wenn Sie uns über die nächsten Seiten folgen, dann haben Sie in der Tat die *Finite Elemente Analyse* im Prinzip verstanden! Alles, was dann kommt, sind nur noch Verfeinerungen und streng genommen Spezialaspekte. Sagen Sie selbst: Ist das nicht hoch motivierend?

Betrachten wir zu Beginn eine ganz einfache Zugfeder aus Stahl, die wir am einen Ende einspannen und am anderen Ende belasten. Das Belasten können wir prinzipiell auf zwei Arten durchführen: Entweder wir geben eine bekannte Kraft von z. B. 100 N auf oder wir ziehen die Feder um einen bestimmten Weg von z. B. 5 mm länger. Für eine Feder gilt das Hooke'sche Gesetz  $F = K \cdot U$ , das heißt, die Federkraft  $F$  ist das Produkt aus Federsteifigkeit  $K$  und Federweg  $U$ .

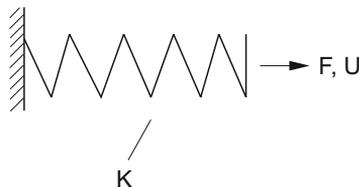


Bild 2-1: Das Hooke'sche Gesetz

Nun verhalten sich die allermeisten Gegenstände des täglichen Lebens wie diese Schraubenfeder, d. h. sie verformen sich linear-elastisch: Kraft  $F$  und Weg  $U$  sind einander proportional. Jede noch so kleine Kraft bedingt einen Weg bzw. eine Verschiebung bzw. eine Verformung. So hat ein Seil oder ein Zugstab der Länge  $\ell$ , des Querschnitts  $A$  und des Elastizitätsmoduls  $E$  die Kraft-Weg Beziehung:

$$F = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot U$$

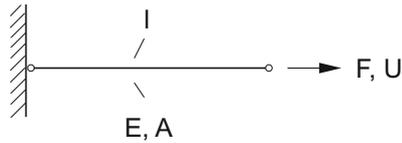


Bild 2-2: Der Zugstab

Wenn man setzt:

$$K = \frac{E \cdot A}{\ell}$$

dann erkennt man wieder das Hooke'sche Gesetz

$$F = K \cdot U \quad \text{mit} \quad K = \frac{E \cdot A}{\ell}$$

Jetzt definieren wir einen Stab ganz allgemein, indem wir an seinem linken Ende eine Verformung  $U_1$  bzw. eine Kraft  $F_1$  und an seinem rechten Ende eine Verformung  $U_2$  bzw. eine Kraft  $F_2$  aufgeben:

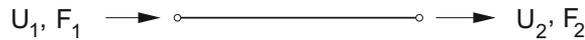


Bild 2-3: Der allgemein definierte Stab

Bilden wir das Kräftegleichgewicht, dann ist:

$$F_1 = K \cdot U_1 - K \cdot U_2$$

$$F_2 = K \cdot U_2 - K \cdot U_1$$

Dieser Gleichungssatz dargestellt in Matrizen-Schreibweise ergibt:

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Beweis: Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$K \cdot U_1 - K \cdot U_2 = F_1$$

$$-K \cdot U_1 + K \cdot U_2 = F_2$$

Den Ausdruck

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/\ell & -EA/\ell \\ -EA/\ell & EA/\ell \end{bmatrix}$$

nennen wir die Element-Steifigkeitsmatrix. Sie gilt hier für einen waagrecht liegenden Stab in der Ebene. Das Gleichungssystem ist normale Matrix-Schreibweise. Dasselbe in symbolischer Matrix-Schreibweise (Matrizen und Vektoren in symbolischer Darstellung werden wir ab jetzt **fett-kursiv** schreiben):

$$K U = F$$

Das ist schon wieder das Hooke'sche Gesetz! Nur stehen statt der Skalare nun Matrizen!

### Rechenbeispiel 1

Wir geben auf einen Stab Kräfte  $F_1$  und  $F_2$ :



Bild 2-4: Kräfte an einem Stab

mit

$$F_1 = -1.000 \text{ N}$$

$$F_2 = +1.000 \text{ N}$$

Der Stab habe folgende Kennwerte:

$$\text{Länge } \ell = 1.000 \text{ mm}$$

$$\text{Elastizitätsmodul } E = 200.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Querschnittsfläche } A = 100 \text{ mm}^2$$

Damit wird  $K$ :

$$K = \frac{200.000 \cdot 100}{1.000} = 20.000 \text{ N/mm}$$

Diese Zahlenwerte eingesetzt ergibt:

$$\begin{bmatrix} 20.000 & -20.000 \\ -20.000 & 20.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.000 \\ +1.000 \end{bmatrix}$$

Ausmultiplizieren des Gleichungssystems:

$$20.000 \cdot U_1 - 20.000 \cdot U_2 = -1.000 \text{ (B1)}$$

$$-20.000 \cdot U_1 + 20.000 \cdot U_2 = +1.000 \text{ (B2)}$$

Um das  $2 \times 2$  Gleichungssystem zu lösen, addieren wir die Gleichung (B1) und (B2), um eine der beiden Unbekannten zu eliminieren:

$$0 + 0 = 0$$

Das Ergebnis der Addition ist zwar richtig, es liefert aber keine Lösung. Warum? Weil die Gleichungen linear abhängig sind! Z. B. Gleichung (B2) mit  $-1$  multiplizieren liefert (B1). Wann tritt so etwas auf? *Wenn ein System statisch unterbestimmt ist!*

#### 1. REGEL FEA

Nie statisch unterbestimmt. Immer statisch bestimmt (kinematisch bestimmt) oder beliebig statisch überbestimmt!

Also Festlegen einer Randbedingung:

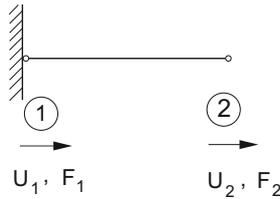


Bild 2-5: Wenn am Punkt 1 ein Festlager ist, dann ist die Verschiebung  $U_1 = 0$

$F_1$  kann als äußere Kraft nicht mehr aufgegeben werden, denn das Lager fängt alles ab! Es kann also nur noch aufgegeben werden:

$U_2$  eine Verschiebung oder  
 $F_2$  eine äußere Kraft

Nun kommt eine sehr grundlegende Unterscheidung, wie wir die Aufgabe angehen: Welche Lösungen suchen wir, Kräfte oder Verschiebungen? Das uns schon bekannte Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

würde in der Mathematik so lauten:  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Das ist die übliche Darstellung eines linearen Gleichungssystems:  $\mathbf{A}$  ist die Koeffizientenmatrix,  $\mathbf{x}$  der Lösungsvektor, also die Unbekannten, und  $\mathbf{b}$  ist die Rechte Seite. Daher:



Vorgabe der äußeren Kräfte und Berechnen der Verschiebungen =  
**Verschiebungsgrößen-Verfahren**

Es geht aber auch anders:

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{x}$$

Dabei ist  $\mathbf{A}^{-1}$  die Inverse von  $\mathbf{A}$ . Daher:



Vorgabe der Verschiebungen und Berechnen der Kräfte =  
**Kraftgrößen-Verfahren**

Heute arbeiten praktisch alle FEA-Systeme nach dem Verschiebungsgrößen-Verfahren:

## 2. REGEL FEA

FEA = Berechnen der Verschiebungen des Systems

Unsere Aufgabe war:

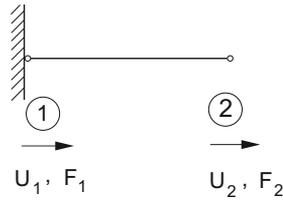


Bild 2-6: Festlagerung an Punkt 1

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Dabei sind:  $K$  die Gesamtsteifigkeitsmatrix,  $U$  die Verschiebungen, d. h. die Unbekannten des Systems und  $F$  die äußeren Kräfte.

Die Gesamt-Steifigkeitsmatrix  $K$  entspricht, weil nur ein einziges Element, der Stab, vorhanden ist, dessen Element-Steifigkeitsmatrix  $K^{\text{Stab}}$ .

Die Randbedingung ist:  $U_1 = 0$ , eine sog. *homogene Randbedingung!* Diese homogenen Randbedingungen werden im Gleichungssystem wie folgt berücksichtigt:



#### VORGEHEN 1: EINBAU HOMOGENE RANDBEDINGUNG $U_j = 0$

V1.1: Setze in  $K$  Zeile  $j$  zu 0

V1.2: Setze in  $K$  Spalte  $j$  zu 0

V1.3: Setze Diagonalelement  $j$  in  $K$  zu 1

V1.4: Setze Kraft  $F_j$  in  $F$  zu 0

Also:

#### V1.1 und V1.2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

#### V1.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

#### V1.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Ausrechnen ergibt:

$$1 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 = 0 \rightarrow U_1 = 0$$

$$0 \cdot U_1 + K \cdot U_2 = F_2 \rightarrow U_2 = \frac{F_2}{K}$$

Wie werden die eigentlichen Stabkräfte, also die inneren Kräfte berechnet? Bis jetzt wurden ja nur äußere Kräfte betrachtet!



## VORGEHEN 2: KNOTENKRÄFTE BERECHNEN

V2: Multipliziere die jeweilige Element-Steifigkeitsmatrix des gesuchten Elements mit den berechneten Verschiebungen!

Also:

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_2/K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_2 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Das sind die Stabkräfte am Element, also innere Kräfte. *Actio = Reactio!*

## Rechenbeispiel 2

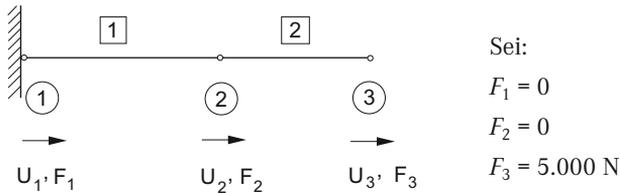


Bild 2-7: Beispiel mit zwei Stäben

Stab 1:  $\ell_1 = 500 \text{ mm}$ ,  $E_1 = 206.000 \text{ N/mm}^2$ ,  $A_1 = 100 \text{ mm}^2$

Stab 2:  $\ell_2 = 400 \text{ mm}$ ,  $E_2 = 206.000 \text{ N/mm}^2$ ,  $A_2 = 40 \text{ mm}^2$

daher:  $K_1 = 41.200 \text{ N/mm}$ ,  $K_2 = 20.600 \text{ N/mm}$

Damit werden die Elemente-Steifigkeitsmatrizen:

$$\text{Erster Stab} = FE_1: \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 \\ -41.200 & 41.200 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1^e$$

$$\text{Zweiter Stab} = FE_2: \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.600 & -20.600 \\ -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2^e$$

Diese beiden Element-Steifigkeitsmatrizen müssen zur Gesamt-Steifigkeitsmatrix zusammengebaut werden. Diesen Vorgang nennt man *Compilation*.

Es gilt:

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{K}_i^e$$

### 3. REGEL FEA

Gesamtsteifigkeitsmatrix = Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen

Hier:

**Element 1**

**Element 2**

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Damit wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix}$$

Also wird das Gleichungssystem zunächst:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

Einbau der Randbedingungen:  $U_1 = 0$  nach Vorgehen 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist dann:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1214 \\ 0,3641 \end{bmatrix}$$

Nunmehr Rückrechnen der inneren Kräfte nach Vorgehen 2, um die Stabkräfte zu erhalten:

Element 1

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 \\ -41.200 & 41.200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1214 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.000 \\ +5.000 \end{bmatrix}$$



Bild 2-8: Kräfte an den Knoten von Stab 1

Element 2

$$\begin{bmatrix} 20.600 & -20.600 \\ -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1214 \\ 0,3641 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.000 \\ +5.000 \end{bmatrix}$$



Bild 2-9: Kräfte an den Knoten von Stab 2

Im Beispiel war eine Kraft  $F_3$  vorgegeben. Nun soll stattdessen eine definierte Verschiebung aufgegeben werden. Das Gleichungssystem sieht zunächst so aus:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Als nächstes bringen wir die äußeren Kräfte an:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wenn wir keine äußeren Kräfte aufbringen, sind sie auch alle logischerweise 0.

Es soll nun eine Verschiebung  $U_3 = 0,3641$  mm aufgegeben werden. Da sie von 0 verschieden ist, nennt man sie eine *inhomogene Randbedingung*:



### VORGEHEN 3: EINBAU INHOMOGENE RANDBEDINGUNG

Die inhomogene RB habe den Wert  $C_j$  und gelte am Freiheitsgrad  $j$

- V3.1: Subtrahiere von Rechter Seite  $F$  den Spaltenvektor, der das Produkt aus  $C_j$  und Spalte  $j$  von  $K$  ist.
- V3.2: Wende Vorgehen 1 an.
- V3.3: Ersetze  $F_j$  durch  $C_j$ .

Das probieren wir gleich aus:

#### Schritt V3.1:

$$U_3 = 0,3641 = C_j \quad \text{d. h.} \quad j = 3$$

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0,3641 \cdot 0 \\ 0 - 0,3641 \cdot (-20.600) \\ 0 - 0,3641 \cdot 20.600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +7.500,46 \\ -7.500,46 \end{bmatrix}$$

#### Schritt V3.2:

Vorgehen 1 anwenden, also Zeile 3 und Spalte 3 in  $K$  je 0, Diagonalelement  $K_{33}$  zu 1,  $F_3$  zu 0:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +7.500,46 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es wäre aber so  $U_3 = 0$ . Eindeutig falsch! Daher müssen wir nun setzen:  $F_3$  zu  $C_3 = U_3 = 0,3641$ .

Schritt V3.3:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.500,46 \\ 0,3641 \end{bmatrix}$$

Nun wird noch die Randbedingung  $U_1 = 0$  also das linke Festlager, eingebaut gemäß Vorgehen 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 61.800 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.500,46 \\ 0,3641 \end{bmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1214 \\ 0,3641 \end{bmatrix} \quad \dots \text{ und das stimmt!}$$

### Rechenbeispiel 3

Nun das Ganze mit einem Balken in der Ebene am Beispiel eines Trägers:

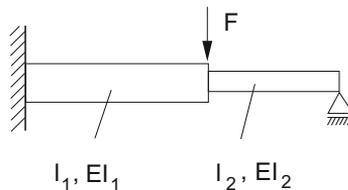


Bild 2-10: Kräfte am Balken

Das System ist statisch überbestimmt! Das stört uns aber gar nicht! Einer der großen Vorteile der FEA ist, dass man mit ihr beliebig statisch überbestimmte Systeme berechnen kann. Gegenüber der „Handrechnung“ mit „0“- und „1“- bzw. „2“- ... „n“-System der Technischen Mechanik, die mit jeder weiteren Überbestimmten sprunghaft aufwendiger wird, steigt der Rechenaufwand bei der FEA praktisch nicht. Daher ist die FEA auch außerordentlich geeignet, um beliebig statisch überbestimmte Stab- und Balkenfachwerke oder Durchlaufträger zu berechnen.

Hingegen müssen Sie bereits bei diesem einfach statisch überbestimmten System bei Berechnung mit der klassischen Technischen Mechanik schon mitdenken: Entweder Sie nehmen das

rechte Loslager weg und kompensieren die dann auftretende Verschiebung  $w$  mit einer Kraft  $X$ , so dass die Verschiebung am rechten Lager wieder 0 wird, Bild 2-11, oder Sie nehmen die Momenteinspannung am linken Lager weg und kompensieren den nun auftretenden Verdrehwinkel  $\psi$  mit einem Moment  $\widehat{X}$ , Bild 2-12. Alle diese Überlegungen brauchen Sie beim Einsatz der FEA nicht mehr durchzuführen.

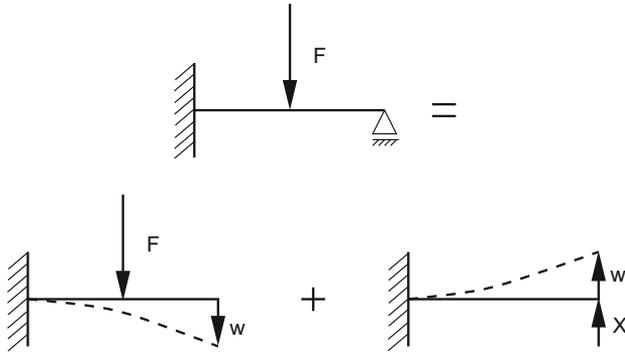


Bild 2-11: Statisch Überbestimmte  $X$  als Kraft

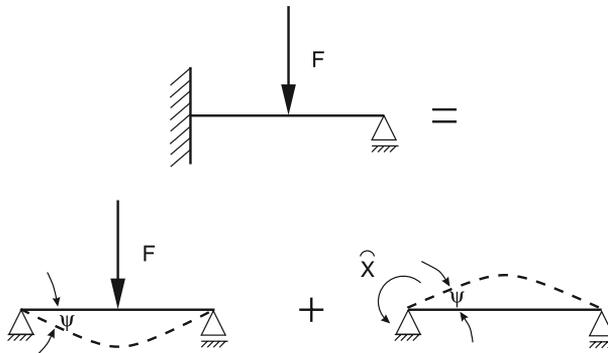


Bild 2-12: Statisch Überbestimmte  $\widehat{X}$  als Moment

Dafür brauchen wir zunächst einen waagrecht in der Ebene liegenden Balken:



Bild 2-13: Die Verschiebungen und Verdrehungen am Balken

Dessen Element-Steifigkeitsmatrix (wir entnehmen sie momentan einfach der Literatur und glauben sie ohne Nachfragen) ist wie folgt:

$$EI \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^3} & \frac{-6}{\ell^2} & \frac{-12}{\ell^3} & \frac{-6}{\ell^2} \\ \frac{-6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ \frac{-12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ \frac{-6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

oder

$$K U = F$$

oder

$$\sum_j K_{ij} U_j = F_i$$

Derartige Element-Steifigkeitsmatrizen findet man in der Literatur /1-7/ oder liest Kapitel 4.

Manche Autoren stellen den Sachverhalt wie folgt dar:



Bild 2-14: Alternative Darstellung der Verschiebungen und Verdrehungen

$$EI \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^3} & \frac{-6}{\ell^2} & \frac{-12}{\ell^3} & \frac{-6}{\ell^2} \\ \frac{-6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ \frac{-12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ \frac{-6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Hier wird zwar vordergründig deutlich, dass am Balken Verschiebungen  $w$ , Verdrehungen  $\varphi$ , Kräfte  $F$  und Momente  $M$  wirken, aber die sehr erwünschte schematische Behandlung wird erschwert. Vor allem für die Darstellung

$$\sum_j K_{ij} U_j = F_i$$

völlig ungeeignet! Und gerade die Indexform der Matrizen-Schreibweise braucht man zum Programmieren.