

Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und
Erforschung des Mathematikunterrichts

RESEARCH

Vanessa Richter

Routen zum Begriff der linearen Funktion

Entwicklung und Beforschung
eines kontextgestützten und
darstellungsreichen Unterrichtsdesigns



Springer Spektrum

Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematik- unterrichts

Band 17

Herausgegeben von

S. Hußmann,

M. Nührenbörger,

S. Prediger,

C. Selter,

Dortmund, Deutschland

Eines der zentralen Anliegen der Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts stellt die Verbindung von konstruktiven Entwicklungsarbeiten und rekonstruktiven empirischen Analysen der Besonderheiten, Voraussetzungen und Strukturen von Lehr- und Lernprozessen dar. Dieses Wechselspiel findet Ausdruck in der sorgsamem Konzeption von mathematischen Aufgabenformaten und Unterrichtsszenarien und der genauen Analyse dadurch initiiert Lernprozesse.

Die Reihe „Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts“ trägt dazu bei, ausgewählte Themen und Charakteristika des Lehrens und Lernens von Mathematik – von der Kita bis zur Hochschule – unter theoretisch vielfältigen Perspektiven besser zu verstehen.

Herausgegeben von

Prof. Dr. Stephan Hußmann,

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger,

Prof. Dr. Susanne Prediger,

Prof. Dr. Christoph Selter,

Technische Universität Dortmund, Deutschland

Vanessa Richter

Routen zum Begriff der linearen Funktion

Entwicklung und Beforschung eines
kontextgestützten und darstellungs-
reichen Unterrichtsdesigns

Vanessa Richter
Technische Universität Dortmund, Deutschland

Dissertation Technische Universität Dortmund, 2014

Tag der Disputation: 21.01.2014

Erstgutachter: Prof. Dr. Stephan Hußmann
Zweitgutachterin: Prof. Dr. Susanne Prediger

ISBN 978-3-658-06180-7
DOI 10.1007/978-3-658-06181-4

ISBN 978-3-658-06181-4 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Geleitwort

In der Didaktik der Funktionen ist bereits viel bekannt über Lernstände, Fehlvorstellungen und typische Fehler. Dieser eher defizitorientierten Sichtweise stehen zwei Perspektiven gegenüber, die bislang noch wenig beforscht und entwickelt sind: eine stärken- bzw. ressourcenorientierte und eine prozessfokussierende Perspektive. Gleichermäßen rudimentär entwickelt ist eine Sprache, diese Prozesse so zu beschreiben, dass Kernelemente sichtbar und für Weiterentwicklungen nutzbar gemacht werden können.

Vanessa Richter hat sich diesen beiden Feldern in ihrem Entwicklungs- und Forschungsprojekt angenommen und für den Inhaltsbereich der linearen Funktionen Begriffsentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern in ihrer eigenen Dynamik und spezifischen inferentiellen Struktur einer wissenschaftlichen Analyse zugänglich gemacht. Zur Beschreibung und Analyse der Lernprozesse hat sie eine mathematikdidaktisch ausgeformte sprachanalytische Theorie genutzt und weiterentwickelt. In verschiedenen Designexperimenten konnte sie damit zentrale Gelenkstellen und Hürden typischer Lernprozesse herausarbeiten. Eben diese bildeten die Grundlage für eine Weiterentwicklung einzelner Aspekte lokaler mathematikdidaktischer Theorien im Themenfeld des funktionalen Denkens. Entstanden ist dabei ein tiefgehendes Verständnis der stattfindenden Lernprozesse und deren inhaltlicher Strukturierung, sowie auch ein deutliches Bild des Zusammenhangs zwischen proportionalem und linearem funktionalen Denken durch Charakterisierung und Identifizierung lernförderlicher bzw. lernhinderlicher Prozesse und Möglichkeiten der Überwindung von Problemstellen.

Dazu beschreibt und analysiert Frau Richter Lernprozesse innerhalb eines im Projekt KOSIMA entwickelten Lehr-/Lernarrangements, das als zentrales Momentum den Übergang von proportionalem zu linearem Denken enthält. Auf Grundlage des im Lehr-/Lernarrangement angelegten Kontextes der Routenplanung und der systematischen Nutzung eines breiten Spektrums an Darstellungen werden Denk- und Handlungsmuster zu proportionalen Zusammenhängen mit Denk- und Handlungsmustern in linearen Zusammenhängen kontrastiert, so dass die erworbenen individuellen Strategien und Vorstellungen restrukturiert werden müssen. Dieses Spannungsfeld nutzt Frau Richter, um mit Hilfe unterschiedlicher ‚Forschungsbrillen‘ die fachliche Strukturierung, Kontextaspekte und Arten der Darstellungsverwendung zu analysieren und die inferentielle Gliederung individueller Lernprozesse durch fachdidaktische Theorien argumentativ zu begründen. Die Theorie der inferentiell gegliederten Wissensstrukturen ermöglicht es ihr dabei, in einer Beschreibungssprache die Strukturierung des Lerngegenstandes mit den rekonstruierten Lernprozessen zu vergleichen.

Das Entwicklungs- und Forschungsprojekt von Frau Richter ist eingebettet in das Forschungsprogramm des Promotionskollegs FUNKEN, das mit dem Dortmunder Modell fachdidaktischer Entwicklungsforschung einen methodologischen Rahmen zur Verfügung stellt, bei dem ein gegenstands- und prozessorientierter Blick im Mittelpunkt stehen. In mehreren Zyklen werden der Lerngegenstand erfasst, Lernendenperspektiven wahrgenommen und analysiert sowie Theorien und Lernarrangements weiterentwickelt. Insofern beinhaltet der Kern der Arbeit von Frau Richter mehrere Facetten: Zum einen wird das Denken von Lernenden im Übergang vom proportionalen zum funktionalen Denken in seiner Prozessstruktur besser verstehbar. Zum anderen können die dabei herausgearbeiteten Potentiale und Hürden zur Weiterentwicklung von Theorie und auch konkreten Lernarrangements genutzt werden.

Die Arbeit stellt ein sehr gutes Beispiel fachdidaktischer Entwicklungsforschung dar. Die vielen interessanten Befunde und schönen Beispiele eröffnen dabei für einen in der Mathematikdidaktik bedeutsamen Inhaltsbereich eine gewinnbringende neue Perspektive.

Stephan Hußmann

Danksagung

Mit der Fertigstellung dieser Arbeit kann ich auf einen dreijährigen Forschungs- und Entwicklungsprozess zurückblicken, der einen bedeutsamen Teil meines Lebens ausgemacht hat. Die vielfältigen Erfahrungen und Einblicke in das wissenschaftliche Arbeiten im Bereich der Mathematikdidaktik, die ich während dieser Zeit gewinnen konnte, lassen mich mit viel Freude, Begeisterung und auch einer Spur Wehmut auf diese Zeit zurückblicken.

Ganz besonderen Dank möchte ich an dieser Stelle an die Person richten, die mich auf diesen Weg geführt und während der gesamten Zeit begleitet hat: Prof. Dr. Stephan Hußmann. Insbesondere durch seine tiefgreifende, theoretisch wohl durchdachte und gleichzeitig sehr inspirative Denk- und Handlungsweise hat er einen großen Teil zu meiner wissenschaftlichen und auch persönlichen Entwicklung beigetragen. In intensiven Gesprächen ermöglichte er es mir immer wieder, eigenständig Zusammenhänge zu erkennen und Mathematik auf eine ganz eigene Art nacherfinden zu können.

Darüber hinaus möchte ich Prof. Dr. Susanne Prediger für die vielen konstruktiven Rückmeldungen in den unterschiedlichsten Phasen meiner Arbeit danken. Gerade in Abschnitten notwendiger Fokussierung und Spezifizierung, zeigte sie einen ungemeinen Weitblick, der meine Arbeit stets positiv beeinflusste.

Weiter möchte ich dem gesamten IEEM und besonders der Arbeitsgruppe Hußmann/Prediger für die vielen anregenden und zielführenden Diskussionen, sowie die überaus gute Arbeitsatmosphäre danken. Ein direkter Dank geht dabei an Maike Schindler, Florian Schacht und Lara Sprenger. Auch in dem interdisziplinär organisierten Forschungs- und Nachwuchskolleg Funken habe ich viele spannende und intensive Stunden der Arbeit verbracht, in denen ich mein Projekt durch die in großer Vielfalt vorhandene fachliche und fachdidaktische Kompetenz immer wieder in neuem Licht betrachten konnte. Ganz besonderer Dank geht an dieser Stelle an Larissa Zwetzschler, Benjamin Zander und Maximilian Gerick.

Nicht zu vergessen sind die zahlreichen Schülerinnen und Schüler, sowie Lehrerinnen und Lehrer, die sich mit viel Engagement und Enthusiasmus für meine Forschung begeistern konnten und ohne deren Beitrag das empirische Fundament dieser Arbeit nicht Bestand haben könnte. Einen besonderen Dank möchte ich an dieser Stelle an Astrid Görke und Gerd Seifert aussprechen, die sich sehr ausdauernd und überaus freundlich meinen vielen Fragen und Anliegen gestellt haben.

Meinen guten Freunden Christian Schlieck, Alexander Lüling, Katja Nieberg, Nina Scheiblich und Jana Höhm danke ich ganz besonders für ihren

fortwährend motivierenden Zuspruch, die viele Geduld und Rücksicht, die sie mir in den arbeitsintensiven Phasen entgegengebracht haben, aber auch für die nötige Abwechslung, die mich wieder neue Kraft schöpfen ließ. Ich kann mich glücklich schätzen, diese Personen zu meinen Freunden zu zählen.

Mein größter Dank gilt meinen Eltern Dagmar und Volker Richter, deren uneingeschränkter und bedingungsloser Unterstützung ich mir schon Zeit meines Lebens sicher sein konnte. Ohne ihren Rückhalt hätte ich wohl kaum die nötige Kraft und Muße aufbringen können, ein solches Projekt zu vollenden. Auch meinem Bruder Jonas möchte ich für seine aufbauende und heitere Art mich zu unterstützen danken. Er hat es immer wieder aufs Beste verstanden mich zu motivieren und zum Lachen zu bringen. Schließlich möchte ich meinem Freund Andreas danken, den ich in dieser Zeit kennen und lieben gelernt habe. Ich kann es kaum in Worte fassen, wie sehr mich sein Zuspruch immer wieder bestärkt hat, auch wenn ich an mir gezweifelt habe. Er wusste mich in den richtigen Momenten zu ermutigen, aufzubauen und war einfach stets für mich da – danke!

Vanessa Richter

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Teil A Rahmentheorien.....	5
1 Methodologischer Zugang – Fachdidaktische Entwicklungsforschung...	5
2 Lerntheoretische Annahmen	12
2.1 Sozialkonstruktivistische Grundhaltung	12
2.2 Individuelle Denkstrukturen als Vorstellungen	13
3 Eine inferentialistischer Perspektive auf Begriffsbildung	19
3.1 Begriffe und ihr Gebrauch in der Theorie der inferentiellen Netze	19
3.2 Der Begriff der Vorstellung in der Theorie der inferentiellen Netze	29
3.3 Das Spezifische inferentieller Netze von mathematischen Begriffen.....	31
Teil B Spezifizierung und Strukturierung des lerngegenstandes.....	33
4 Der Lerngegenstand ‚lineare Funktion‘	33
4.1 Der Begriff ‚Funktion‘	33
4.2 Der Begriff ‚lineare Funktion‘	47
4.2.1 Spezifizierung zum Begriff der linearen Funktion.....	47
4.2.2 Strukturierung zum Begriff der Linearen Funktion	68
Teil C Designentwicklung.....	73
5 Theoretische Rahmungen zur Gestaltung von Lehr-Lernprozessen	73
5.1 Ein ganzheitliches Konzept	74
5.2 Der Begriff der Diagnose	79
6 Empirische Einsichten zur Gestaltung von Lehr-Lernprozessen	82
6.1 Empirische Einsichten zu eingesetzten Aufgabenformaten.....	82
6.2 Kontextbedingungen als Einflussfaktoren auf Lernprozesse	83
7 Unterrichtsdesign des vorliegenden Projekts	87

7.1	Design-Prinzipien und gegenstandsspezifische Konkretion.....	87
7.2	Das Lehr-Lernarrangement.....	92
7.3	Zwischenfazit mit Darlegung operationalisierter Forschungsfragen.....	100
Teil D Durchführung und Auswertung der Design-Experimente		103
8	Methoden der Datenerhebung und Auswertung	103
8.1	Forschungsdesign.....	103
8.1.1	Forschungsmethoden	103
8.1.2	Die Durchführung von Zyklen von Design-Experimenten	109
8.2	Methoden der Auswertung.....	113
8.2.1	Vorstrukturierung und Grobanalyse der Designexperimente	114
8.2.2	Darlegung des Werkzeuges zur Feinanalyse der Designexperimente	117
9	Analyseergebnisse zum Lerngegenstand in Zyklus 1 und 2	125
9.1	Forschungslogische Struktur der Darstellung des iterativen Vorgehens	125
9.2	Der Leitfaden für die Zyklen 1 und 2	126
9.3	Ausschärfung der fachlichen Strukturierung.....	129
10	Analyseergebnisse zu den Design-Prinzipien in Zyklus 1 und 2	161
10.1	Design-Prinzip I: Anbindung an Vorerfahrungen	162
10.2	Design-Prinzip II – Nutzung eines sinnstiftenden Kontextes.....	179
10.3	Design-Prinzip III: differenzierte und reiche Verwendung von Darstellungen.....	200
11	Analyseergebnisse in Bezug auf Lernendenperspektiven in Zyklus 3 220	
11.1	Erfassung von Lernausgangslagen in Zyklus 3	220
11.2	Fallanalyse Dilay	231
11.3	Fallanalyse Niklas.....	262
11.4	Kurzzusammenfassung.....	296
12	Empirische Befunde aus Zyklus 3	298
12.1	Empirische Befunde zur Strukturierung des Lerngegenstandes ..	298
12.2	Empirische Befunde zu möglichen Lernverläufen.....	300
12.3	Empirische Befunde zu den eingesetzten Designprinzipien.....	306

Teil E Beiträge zur lokalen Theoriebildung	325
13 Zusammenfassung der Ergebnisse	325
13.1 Lokale Einsichten zu individuellen Lernverläufen	327
13.2 Lokale Einsichten in Bezug zu den eingesetzten Design- Prinzipien.....	337
13.3 Lokale Einsichten zum Lerngegenstand.....	341
13.4 Fazit und Perspektiven	346
Literatur	351

Einleitung

0	150	-0	$110x + 150 = y$ = bei 0	Also ich gehe auf eine Stunde erst runter und dann nimm ich das immer mal die Zahl die bei 0 raus kommt raus wenn da was auf den Tag steht muss man erst gucken was darauf steht und wie viel mehrlich sonst nimmt man das immer doppelt und dreifach
1	260	110		
2	370	220		
3	480	330		
4	590	440		

(Tina, Klasse 8, Antwort auf die Frage wie ein Tipp aussehen kann, um ausgehend von zwei bekannten Wertepaaren weitere Werte zu bestimmen)

Tina ist eine Schülerin einer 8. Klasse einer Gesamtschule in NRW. Zum Ende einer Unterrichtsreihe zum Begriff ‚lineare Funktion‘ bestimmt sie in einer Aufgabe (ausgehend von 2 bekannten Wertepaaren) weitere Werte einer linearen Funktion. Es gelingt ihr auch eine passende Funktionsgleichung aufzustellen. Auf die Frage, wie man bei einer linearen Funktion allgemein weitere Werte bestimmen kann, formuliert sie den oben dargestellten Tipp. Ihre Beschreibung stützt Tina im Wesentlichen auf die zentrale Eigenschaft linearer Funktionen – ein gleichbleibendes Wachstum. Die Vorgehensweise zur Bestimmung weiterer Werte ist ihrer Ansicht nach dann zu verändern, wenn die lineare Funktion einen Startwert ungleich 0 besitzt.

Tina zeigt Kenntnisse wie sie für den Gegenstand ‚lineare Funktion‘ maßgeblich sind und wie sie zum Ende einer Lerneinheit stehen können. Die Eigenschaft des gleichbleibenden Wachstums (feste Änderung) ermöglicht auf besonders einfache Art und Weise das Bestimmen von Zwischen- und zukünftigen Werten. Existiert ein Startwert ungleich 0, reduzieren sich die möglichen Rechenstrategien, die zu einem richtigen Ergebnis führen. Tina berücksichtigt diese Bedingungen in ihrer Beschreibung umfassend. Doch die Wege zu solch differenzierten Kenntnissen können durch Beschränkungen, Umwege und Ähnliches gekennzeichnet sein.

Linearität gilt als eines der Kernkonzepte für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I und ist als Gegenstand fest in den Lehrplänen verankert (vgl. u.a. Kernlehrplan Mathematik für den mittleren Schulabschluss, 2004). Obwohl dieser Lerngegenstand zunächst recht triviale Eigenschaften (z.B. gleichbleibendes Wachstum) mit sich zu tragen scheint, ist ein umfassender Vorstellungsaufbau auch im Hinblick auf nachfolgende Konzepte, beispielsweise im Analysisunterricht der Sekundarstufe II, oder auch die Nachvollziehbarkeit von Modellierungen von Alltagssituationen zentral: „Die gesamte Analysis wäre nicht so erfolgreich gewesen, wenn nicht einige Funktionstypen, die ma-

thematisch recht einfach zu handhaben sind, sich für die Beschreibung gewisser realer Phänomene besonders eignen“ (Fischer 1980, S. 6). Der Aufbau von tragfähigen individuellen Vorstellungen zum Begriff ‚lineare Funktion‘ bildet damit ein zentrales Lernziel im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Dazu zählt auch, diesen Begriff in seiner Spezifität und seinen strukturellen Zusammenhängen zu begreifen (Winter 1995).

Demnach ist eine Rechtfertigung für die Thematisierung dieses mathematischen Begriffes in curricularer Hinsicht nicht notwendig. Vielmehr ergibt sich ein Erkenntnisinteresse aus einer Problemlage in der Praxis heraus: Bestehende empirische Untersuchungen deuten darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler häufig keine umfassend tragfähigen Vorstellungen zum Begriff ‚lineare Funktion‘ besitzen. Dies kann in proportionalen Übergeneralisierungstendenzen zum Ausdruck kommen (vgl. u.a. van Dooren & Greer 2010), die auch von Tina explizit als Gefahrenstelle erwähnt werden: „sonst nimmt man das immer doppelt und dreifach“. Dies ist nur eine Facette möglicher Hürden, die im Zusammenhang mit dem Begriff der linearen Funktion auftreten und zu einem verkürzten Blick auf funktionale Zusammenhänge führen können. Als eine weitere Problemlage sind z.B. auch Darstellungswechsel identifiziert: Häufig werden verschiedene Darstellungsformen ein und desselben (linearen) funktionalen Zusammenhangs nicht miteinander vernetzt. Sie bestehen in den Denkstrukturen parallel nebeneinander fort ohne wechselseitig genutzt zu werden (vgl. u.a. Laakmann 2013).

Diese Problemlage hebt die Relevanz des Forschungsvorhabens in Bezug auf eine Notwendigkeit nach einer Optimierung von Lehr-Lernprozessen hervor. Durch die Entwicklung und Beforschung eines spezifisch aufbereiteten Lehr-Lernangebots (kontextgestützt und darstellungsreich) sollen im Rahmen dieser Arbeit Möglichkeiten für Routen zum Begriff ‚lineare Funktion‘ eröffnet werden. Erst wenn Lernende tragfähige Vorstellungen zu diesem Begriff in Lernprozessen aufbauen, können sie eine Nutzung bzw. Aktivierung von diesen Vorstellungen in nachfolgenden Situationen begründet abwägen. Auf Entwicklungsebene wird dabei angenommen, dass sich durch eine Ausrichtung an einem gegenstandsübergreifenden Orientierungsrahmen, wie beispielsweise an allgemeinen in der Lehr-Lerntheorie verankerten Gestaltungsprinzipien, erste Ausgangspunkte für die Erarbeitung eines strukturierten Lehr-Lernarrangements ergeben können (vgl. Prediger et al. 2013). Dabei wird davon ausgegangen, dass gegenstandsübergreifende Ideen und Konzepte für den Begriff ‚lineare Funktion‘ zu spezifizieren sind, um die Lücke zwischen allgemeiner Theorie und einer konkreten Umsetzung in Lehr-Lernangeboten kleiner werden zu lassen (vgl. Cobb & diSessa 2004).

Über die empirische Fundierung hinaus, sollen die entwickelten Lehr-Lernangebote, theoretisch verankert werden. Dazu zählt für diese Arbeit zunächst eine Verortung innerhalb sozial-konstruktivistischer Ideen, bei denen

Lernprozesse zentral vom Individuum aus als ein aktiver Auseinandersetzungsprozess mit dem Lerngegenstand gedacht werden (vgl. Reinmann-Rothmeier/Mandl 2001). Auch das Verständnis von Mathematik und damit dem Treiben von Mathematik, ist in dieser Arbeit u.a. dadurch zentral gekennzeichnet: „Mathematik ist ein Denken in und ein Handeln mit Begriffen“ (Hußmann 2009, S. 62). Durch diese Schwerpunktsetzung rücken Prozesse der Begriffsbildung – unter einer gegenstandsspezifischen Perspektive auf den Begriff der linearen Funktion in den Vordergrund. Dazu zählt auch die Festlegung (dieser Begriff wird im weiteren Verlauf der Arbeit noch eine zentrale Rolle übernehmen – vgl. Kap. 3) auf eine sprachpragmatische Herangehensweise, bei der Begriffe als netzartige Strukturen aufgefasst bzw. rekonstruiert werden (vgl. Hußmann 2013, Schindler 2013, Schacht 2012). Die Nutzung einer solchen Theorie ermöglicht mithilfe desselben Vokabulars eine Beschreibung des Lerngegenstandes aus normativer Perspektive und eine Beschreibung der Sprache der Lernenden. Dabei bildet dieser Rahmen nicht nur eine Grundlage für die Entwicklung von Lernangeboten, sondern zentral auch für die parallel stattfindenden Forschungsprozesse.

Neben dem Ziel der Entwicklung von empirisch und theoretisch fundierten Lernangeboten (kontextgestützten und darstellungsreichen Routen) ist in dieser Arbeit von zentralem Erkenntnisinteresse, wie Lernen zum Begriff ‚lineare Funktion‘ aussehen kann. Dazu ist die Beforschung von gegenstandsspezifischen Lernprozessen (individuellen Routen) wesentlich. Insbesondere über mögliche Lernverläufe und Entwicklungen von Vorstellungen zu diesem Begriff existieren bisher nur vereinzelte Erkenntnisse. Dabei wird angenommen, dass Lernende bereits Vorstellungen über gleichbleibende Wachstumsprozesse besitzen, weil Proportionalität bereits vor der Thematisierung von linearen funktionalen Zusammenhängen z.B. in Form von ‚Dreisatz-Regeln‘ in der Grundschule, im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und implizit auch im Alltag der Schülerinnen und Schüler eine Rolle spielt. Welchen Einfluss diese auf die Auseinandersetzung mit spezifischen Lehr-Lernbedingungen zum Begriff ‚lineare Funktion‘ haben können, stellt ein Erkenntnisinteresse dieser Arbeit dar.

Die erläuterte Ausgangslage bedingt demnach Forschungsfragen auf Ebene der **Entwicklung**:

Wie kann ein empirisch und theoretisch fundiertes Lernangebot zum Begriff der linearen Funktion aussehen?

und **Forschung**:

Wie können Lernprozesse zum Begriff der linearen Funktion aussehen und welche Auswirkungen hat dabei das entwickelte Lernangebot?

Damit besteht das vordergründige **Entwicklungsziel** dieser Arbeit in der Erarbeitung eines Lehr-Lernangebotes, welches einen umfassenden und vernetzten Aufbau von Vorstellungen begünstigen kann. Das zentrale **Forschungsziel** wird in einem Verstehen von Lernprozessen und damit individuellen Sinnkonstruktionen zum Lerngegenstand ‚lineare Funktion‘ gesehen. Daneben nimmt sich diese Arbeit ebenfalls zum Ziel Auswirkungen einzelner Elemente des entwickelten Lehr-Lernangebotes im Detail zu beforschen. Auf diese Weise lässt sich die Bedeutung der Produkte dieser Arbeit, sowohl auf einer Ebene unterrichtspraktischer Realität, als auch gegenstandsspezifischer, lokaler Theorie verorten.

Aufgrund der steten Wechselwirkung und mehrgliedrigen Zielausrichtung zwischen den Ebenen der Forschung und Entwicklung, bietet sich die Orientierung an einem spezifischen Forschungsprogramm an, welches im direkten Anschluss als ein spezifischer Zugang zu fachdidaktischer Entwicklungsforschung dargestellt bzw. innerhalb bestehender Zugänge verortet wird.

Auch der Aufbau dieser Arbeit, entlang von fünf Teilen, begründet sich mit der Festlegung auf den spezifisch gewählten methodologischen Zugang der fachdidaktischen Entwicklungsforschung. Dabei wird in Teil A neben der Darlegung der Wahl des Forschungsparadigmas (vgl. Kap. 1), der lehr-lerntheoretische Orientierungsrahmen als Hintergrundtheorie abgesteckt (vgl. Kap. 2).

In Teil B folgt mit Festlegung auf die Nutzung der Theorie der inferentiellen Netze (vgl. Hußmann 2013) die Darstellung eines Theorierahmens, auf dessen Basis Begriffsbildungsprozesse betrachtet werden bzw. der Lerngegenstand beschrieben werden kann. Teil C umfasst Ausführungen zu Gestaltungsprinzipien (vgl. Kap. 5 und 6) mit anschließender Darlegung des entwickelten Unterrichtsdesigns (vgl. Kap. 7).

Nachfolgend werden in Teil D zunächst Methoden der Datenerhebung und Auswertung erörtert. Durch das zentrale Erkenntnisinteresse an tieferliegenden, individuellen Entwicklungsprozessen von Denkstrukturen bedingt, ergibt sich die Konzentration auf rekonstruktive Methoden der Datenerhebung, sowie in Konsequenz die Nutzung eines textinterpretativen Analyserahmens (vgl. Kap. 8). Daran schließen sich Analysen des empirisch erhobenen Datenmaterials mit je spezifischen Schwerpunktsetzungen auf den Lerngegenstand (vgl. Kap. 9 und 12.1), Bedingungen und Wirkungsweisen des Unterrichtsdesigns (vgl. Kap. 10 und 12.3), sowie rekonstruierte Lernendenperspektiven (vgl. Kap. 11 und 12.2) an.

In Teil E werden die empirischen und theoretischen Erkenntnisse dieser Arbeit als Antwort auf die gestellten Forschungsfragen in Form lokaler Theorieelemente dargestellt (vgl. Kap. 13), bevor abschließend ein Fazit und Ausblick gegeben wird, bei dem auf mögliche Perspektiven nachfolgender Untersuchungen eingegangen wird.

Teil A Rahmentheorien

1 Methodologischer Zugang – Fachdidaktische Entwicklungsforschung

Die Frage nach Möglichkeiten der Verbesserung von Unterrichtsqualität, sowohl hinsichtlich der Perspektive der Entwicklung eines gegenstandsspezifischen Unterrichtsdesigns, als auch unter Berücksichtigung der Beforschung individueller Lernprozesse, erfordert eine spezifische methodologische Ausrichtung.

Im Folgenden wird dargelegt, welchen methodologischen Grundgedanken das in dieser Arbeit beschriebene Entwicklungsforschungsprojekt folgt. Die Realisierung der gegenstandsspezifischen Arbeitsbereiche folgt einem Ansatz, der im Rahmen des Dortmunder Forschungs- und Nachwuchskollegs FUNKEN herausgearbeitet wurde und der für diese Arbeit besonders gewinnbringende Perspektiven eröffnet.

Die Motivation für dieses Entwicklungsforschungsprojekt wird auf einer für die Praxis und die Theorie relevanten Ebene verortet. Wie zuvor erläutert, entwickeln viele Lernende den Begriff Linearität eindimensional, sowohl hinsichtlich der Verwendung von Darstellungen, als auch in Bezug auf situationsinadäquate Anwendungen proportionaler Vorstellungen (vgl. u.a. Leinhardt et al. 1990, van Dooren & Greer 2010). Viele empirische Befunde belegen diese Problemlage auf Basis der Untersuchung von Lernständen von Schülerinnen und Schülern und stellen eine gute Ausgangslage dar. Um jedoch tiefere Einblicke in gegenstandsspezifische Lernprozesse zu erhalten und mögliche Gründe für bestimmte Entwicklungen individueller Vorstellungen bzw. Zusammenhänge zwischen nicht adäquaten Vorstellungen rekonstruieren zu können, muss der empirische Blick auf Lernstände mit einer theoriegeleiteten Perspektive auf die Beforschung von Lernprozessen ergänzt werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass Problemstellen des Lernens auch immer Fragen nach einer (Re-) Strukturierung des Lerngegenstands und damit einer stoffdidaktischen Analyse aufwerfen. Auf der einen Seite wird damit die Notwendigkeit nach mehr Grundlagenforschung aufgeworfen, auf der anderen Seite ist Entwicklungsarbeit erforderlich, um dem in der Praxis verankerten Problem entgetreten zu können.

Grundlagenbasierte Forschung vs. anwendungsorientierte Entwicklung

Die in der Praxis zu verortende Problemlage macht ein Beforschen von Lernverläufen und der darin stattfindenden Entwicklungsprozesse notwendig, um verstehen zu können, was zentrale Gelenkstellen des Lernens zum Gegenstand der linearen Funktion sind und wie sich diese auf individuelle Lernprozesse auswir-

ken können. Andererseits erscheint die Entwicklung eines von Theorie geleiteten und in der Praxis erprobten Designs erforderlich, um einen direkten Einfluss auf die Problemlage nehmen zu können. Daneben ist es unumgänglich auch Wirkungsweisen einzelner Design-Elemente zu erforschen, um Rückschlüsse auf den Einfluss des entwickelten Unterrichtsdesigns ziehen zu können.

Damit ergeben sich für diese Arbeit Zielsetzungen auf zwei Ebenen: Forschung und Entwicklung. Ein praxisrelevantes Entwicklungsziel besteht in der Entwicklung eines Unterrichtsdesigns, welches zu der Bewältigung bzw. Reduzierung der zuvor dargestellten Problemlage beiträgt. Ein solches Unterrichtsdesign umfasst dabei sowohl ein gegenstandsspezifisches Lehr-Lernarrangement, eine fachliche Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes, als auch die gegenstandsspezifische Ausdifferenzierung von Design-Prinzipien. Durch eine von Theorie geleitete Entwicklung werden auf Ebene der Forschungsziele gegenstandsspezifische Theorieelemente des Lehrens und Lernens zum Begriff der linearen Funktion abgeleitet, welche die Tragfähigkeit des Unterrichtsdesigns forschungsbasiert stützen. Damit entsteht sowohl ein direkter Nutzen für die Unterrichtspraxis, als auch für die Weiterentwicklung gegenstandsspezifischer Theorieelemente.

Das gewählte Programm der fachdidaktischen Entwicklungsforschung bietet für ein solches Wechselspiel einen vielversprechenden methodologischen Rahmen. Die zunächst gegensinnig anmutenden Pole von Forschung und Entwicklung werden in eine produktive Verbindung gebracht und auf diese Weise Vernetzungen zwischen grundlagenbasierter und anwendungsorientierter Forschung möglich (vgl. Prediger & Link 2012). Grundlagenforschung und Entwicklungsarbeit sind dabei einander befruchtende Zugänge: Durch eine konsequente Verschränkung werden entwickelte Produkte systematisch beforcht und damit empirisch und theoretisch fundiert (vgl. Hußmann et al. 2013).

Fachdidaktische Entwicklungsforschung wird mit teils unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen realisiert, wie z.B. im Ansatz der design science (vgl. Wittmann 1995), developmental research (vgl. Freudenthal 1991, Gravemeijer 1994, 1998), Formative research (vgl. Newman 1990), Engineering Research (vgl. Burkhardt & Schoenfeld 2003) oder Educational design research (vgl. van den Akker et al. 2006, McKenney & Reeves 2012). Trotz dieser scheinbaren Vielschichtigkeit verfolgen alle zuvor genannten Ansätze gemeinsame Grundgedanken. Van den Akker et al. (2006) haben versucht den gemeinsamen Kern dieser Zugänge und Verständnisse von fachdidaktischer Entwicklungsforschung herauszuarbeiten und fassen dies in fünf übergeordneten Kategorien zusammen:

- (A) Interventionistisch (Entwicklung von Interventionen in der ‚realen Welt‘),
- (B) Orientierung an Brauchbarkeit (ableitbarer praktischer Nutzen in realen Umgebungen),
- (C) Iterativität (wiederkehrende zyklische Abfolge von Design, Evaluation und Überarbeitung),

(D) Prozessorientierung (Fokussierung auf das Verstehen und Verbessern der entwickelten Interventionen) und

(E) Theorieorientierung (theoriebasierte Design-Entwicklung sowie Theoriebildung als Forschungsprodukt).

Je nach Ansatz lassen sich Schwerpunktsetzungen entlang dieser fünf Kriterien finden (vgl. Link 2012). ‚Engineering Research‘ ist beispielsweise ein Zugang bei dem eine vollständige Implementierung der entwickelten Unterrichtsdesigns angestrebt (vgl. Burkhardt 2006) und damit eine klare Fokussierung auf die Bereiche (A) und (B) gelegt wird. Der Ansatz der ‚design science‘ dagegen, betont besonders: „development and evaluation of substantial teaching units“ (Wittmann 1995, S. 356). Folglich werden neben der Schwerpunktsetzung entlang eines konkreten Lerngegenstands vor allem die Bereiche der Iterativität (C) und Prozessorientierung (D) hervorgehoben. Die Perspektiven von Lernenden werden dabei als Anknüpfungspunkte der Entwicklung von Lehr-Lernarrangements gesehen (vgl. Prediger & Link 2012).

Im Dortmunder Modell Fachdidaktischer Entwicklungsforschung findet sich ebenfalls eine Schwerpunktsetzung, die sich in zwei Facetten zeigt.

Prozess- und Gegenstandsorientierung

Zum einen zeichnet sich dieser Zugang dadurch aus, dass der Fokus auf das Verstehen von Lernprozessen gelegt wird (vgl. D): Dabei werden neben dem Verstehen der Bedingungen und Wirkungen des entwickelten Designs auch individuelle Lernprozesse in den Blick genommen. Das Analysieren und Erklären von Lernverläufen, möglichen Hürden und Potentialen ist eine Besonderheit dieses Zugangs und ermöglicht empirisch fundierte Aussagen über lokale Theorieelemente zum Lehren und Lernen (vgl. Hußmann et al. 2013).

Die zweite Besonderheit des Dortmunder Modells lässt sich nur schwer einer der globalen Perspektiven fachdidaktischer Entwicklungsforschung nach van den Akker (2006) aus erziehungswissenschaftlicher Sicht zuordnen, ist deshalb aber nicht weniger bedeutsam. Neben einer Fokussierung auf die Lernendenperspektiven (wie z.B. auch bei Wittmann 1995 zu finden), wird eine fachliche Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes angestrebt. Dies ist eine aus der Fachdidaktik heraus eingeschlagene notwendige Betonung, die über Fragen des ‚Wie‘ des Lernens hinaus, insbesondere Fragen nach spezifischen Lerninhalten sowie deren Verknüpfungen in das Erkenntnisinteresse rücken lässt (vgl. Prediger & Zwetzschler 2013). Demnach werden gegenstandsorientiert Verstehenselemente des Denkens und Handelns von Lernenden in den Blick genommen und gleichzeitig eine fachliche Klärung der zu lernenden Elemente in Bezug auf den jeweils fokussierten Lerngegenstand angestrebt (vgl. Hußmann et al. 2013).

Für das Dortmunder Modell des Forschungs- und Nachwuchskollegs FUNKEN sind neben der zuvor geschilderten (1) Gegenstandsorientierung und (2) Prozessorientierung auch die Charakteristika der (3) Iterativität und (4) Vernetzung kennzeichnend (vgl. Prediger et al. 2012). Das Prinzip der Vernetzung ist insofern hervorzuheben, als gewonnene Erkenntnisse aus einzelnen Arbeitsbereichen stets miteinander verknüpft werden, um einen umfassenden und in sich schlüssigen Erkenntnisgewinn zu erzielen. Diese vier Elemente werden den gemeinsamen Charakteristika fachdidaktischer Entwicklungsforschung in Tabelle 1 gegenübergestellt.

Tabelle 1 Merkmale fachdidaktischer Entwicklungsforschung – Verortung des Ansatzes des Dortmunder Forschungs- und Nachwuchskollegs

Gemeinsame Merkmale Fachdidaktischer Entwicklungsforschung (vgl. van den Akker et al. 2006)	Charakteristika des Dortmunder Forschungs- und Nachwuchskollegs Fachdidaktischer Entwicklungsforschung FUNKEN (vgl. Prediger & Link 2012; Prediger et al. 2012; Hußmann et al. 2013)
(A) Interventionistisch (Entwicklung von Interventionen in der ‚realen Welt‘)	Durchführung von Design-Experimenten
(B) Praktischer Nutzen (Mehrwert der Entwicklungsprodukte wird an deren Umsetzbarkeit in der Realität gemessen)	Entwicklung eines Unterrichtsdesigns (u.a. Prototyp Lehr-Lernarrangement – wird in diesem Vorhaben realisiert, steht aber nicht im Fokus des Forschungsprogramms)
(C) Iterativität (zyklische Abfolge von Design, Evaluation und Überarbeitung)	Iterativität Vernetzung
(D) Prozessorientierung (Fokussierung auf das Verstehen und Verbessern von Interventionen)	Prozessorientierung Verstehen und Erklären anhand individueller Lehr- und Lernprozessen
(E) Theorieorientierung	Theorie nicht nur als Ausgangspunkt sondern auch als Forschungsprodukt
	Gegenstandsorientierung (aus fachdidaktischer Sicht notwendige Hervorhebung in Ergänzung zu erziehungswissenschaftlichen Schwerpunkten)

Insbesondere die Eigenschaften der Iterativität und Vernetzung beeinflussen das methodische Vorgehen auf besondere Weise. In dieser Arbeit umfasst die Reali-

sierung des Entwicklungsforschungsprojektes mehrere Durchläufe von Erhebungen – im Folgenden wird von Design-Experimenten gesprochen – die nach jeweiliger Analyse eine Weiterentwicklung des Unterrichtsdesigns ermöglichen. Auf Basis dieser Weiterentwicklung schließt sich eine erneute Phase der Erprobung in Design-Experimenten an, die wiederum analysiert werden. Der Begriff ‚Unterrichtsdesign‘ bezieht sich dabei auf theoretisch bzw. empirisch abgesicherte Theorien und umfasst zum einen fachdidaktisch und allgemeindidaktisch fundierte Spezifizierungen des Lerngegenstandes, sowie fachliche Strukturierungen des Lerngegenstandes, orientiert an konkreten Lernzielen. Zum anderen enthält ein Unterrichtsdesign an die Theorien angebundene Design-Prinzipien, die für Lehr-Lernarrangements jeweils gegenstandsspezifisch konkretisiert werden. Insofern umfasst ein Unterrichtsdesign Theorien und Design-Prinzipien, enthält aber auch als Produkte exemplarische Lehr-Lernarrangements sowie strukturierte und spezifizierte Lerngegenstände. Dabei steht nicht im Vordergrund das einmal entwickelte Unterrichtsdesign mehrfach zu erproben, sondern vielmehr verschiedene Arbeitsbereiche auf den Ebenen von Forschung und Entwicklung gewinnbringend miteinander zu vernetzen und aufbauend auf dieser Verknüpfung und damit einhergehenden Erkenntnissen iterativ zu arbeiten. Neben der Durchführung und Auswertung von Design-Experimenten prägen drei weitere Arbeitsbereiche die Tätigkeiten des Forschens und Entwickelns im Dortmunder Modell. Durch eine Gliederung in vier Arbeitsbereiche wird ein Rahmen geschaffen, um Prozesse des Forschens und Entwickelns methodisch und methodologisch kontrolliert verknüpfen zu können:

- Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes
- Design-Entwicklung
- Durchführung und Auswertung von Design-Experimenten
- (Weiter-) Entwicklung lokaler Theorien.

Gerade die ersten beiden Arbeitsbereiche der Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes sowie die Design-Entwicklung sind Bereiche, die sich vorwiegend auf der Ebene der Entwicklung verorten lassen. Erst in wechselseitiger Vernetzung zu den Arbeitsbereichen der Durchführung und Auswertung von Design-Experimenten sowie der (Weiter-) Entwicklung lokaler Theorien auf Ebene der Forschung entsteht ein vernetzter Prozess, der durch ein mehrfaches Durchlaufen sowohl Forschungs- als auch Entwicklungsprodukte stets optimiert und deren Qualität steigert.

Theorieorientierung spielt für den Ansatz der fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell eine wechselseitige Rolle. Zum einen wird die Design-Entwicklung durch bereits existierende Theorien geleitet (z.B. gegenstandsübergreifende Lehr-Lerntheorien) und zum anderen entstehen als Produkte lokale, d.h. gegenstandsspezifische Theorieelemente, die einen Beitrag

zu neuer Theoriebildung beitragen können. „The purpose of design experiments is to develop theories about both the process of learning and the means designed to support that learning“ (Gravemeijer & Cobb 2006, S. 18). Die Vielschichtigkeit der generierten lokalen Theorieelemente umfasst demnach sowohl Aussagen über Verläufe und Hürden von Lernprozessen, als auch Bedingungen und Wirkungsweisen von Designelementen in Lehrprozessen (vgl. Prediger et al. 2012). Das Dortmunder Modell konkretisiert dieses Bestreben durch die Benennung eines eigenständigen Arbeitsbereiches: Lokale Theorien zu gegenstandsspezifischen Lehr- und Lernprozessen (vgl. Prediger et al. 2012).

Der Aufbau dieser Forschungsarbeit gliedert sich entlang der vier Arbeitsbereiche: Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes (Teil B), Designentwicklung (Teil C), Durchführung und Auswertung der Design-Experimente (Teil D) und Entwicklung lokaler Theorieelemente (Teil E). Diesen vier Teilen ist ein Teil A vorgelagert, in dem eine Verortung im Rahmen allgemeiner Lerntheorien vorgenommen wird.

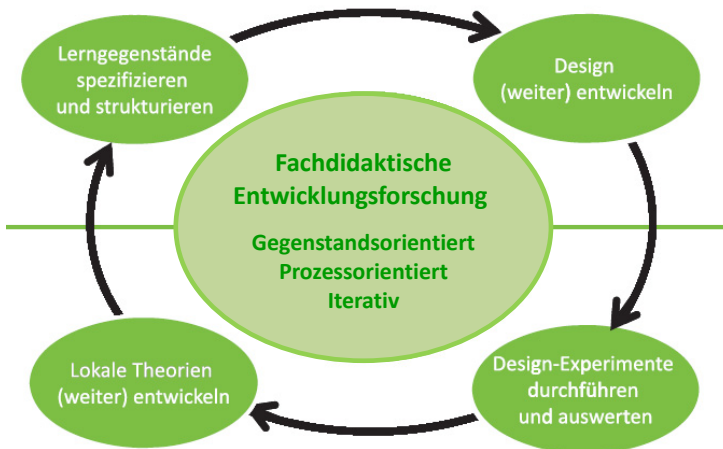


Abbildung 1.1 Zyklus Fachdidaktischer Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell (Prediger et al. 2012)

Die Arbeitsbereiche sind keineswegs als nacheinander abzuarbeitende Etappen zu denken, sondern vielmehr als Bereiche, die mit mehr oder weniger starker Bedeutung den jeweiligen Forschungs- bzw. Entwicklungsprozess kennzeichnen, miteinander vernetzt sind und iterativ durchlaufen werden. Erst durch die gegenseitige Vernetzung wird der Mehrwert eines wechselseitigen Nutzens neu gewonnener Erkenntnisse (sowohl theoretischer als auch empirischer Natur) deutlich. Ein fortlaufendes aufeinander Beziehen und Nutzen von Einsichten

einzelner Arbeitsbereiche für weitere Forschungs- und Entwicklungsphasen erzeugt einen über die einzelnen Arbeitsbereiche hinweg greifenden Prozess.

Die lineare Abfolge schriftlicher Ausarbeitungen lässt nur bedingt die Komplexität, sowie das Ineinandergreifen neugewonnener Einsichten aus einzelnen Forschungs- und Entwicklungsphasen zu. „Books are linear, educational design research is not“ (McKenney & Reeves 2012, S. 7).

Insgesamt werden durch eine an die Arbeitsbereiche des Dortmunder Modells angelehnten Gliederung dennoch die zyklische und iterative Arbeitsweise in Ansätzen greifbar gemacht.

2 Lerntheoretische Annahmen

Ein zentrales Forschungsinteresse dieser Arbeit besteht darin, einen Einblick zu erhalten, wie Lernende denken, wie sich ein solches Denken entwickelt und wie die Verknüpfungen der inneren Strukturen von Individuen und der sie umgebenden Welt aussehen. Um diese Phänomene beschreibbar zu machen, werden spezifische Theorien als Beschreibungs- und Erklärungsmodelle herangezogen. Dabei fühlt sich diese Arbeit sozialkonstruktivistischen Ideen verpflichtet, welche im folgenden Kapitel zu Beginn näher beschrieben werden (vgl. Kap. 2.1).

Um sich dem Denken von Individuen weiter zu nähern, werden in einem ersten Zugang individuelle Denkstrukturen von Lernenden mithilfe des Begriffs der Vorstellung beschrieben. Vor einer solchen Annäherung wird eine Verortung im Rahmen allgemeiner Lerntheorien vorgenommen.

2.1 Sozialkonstruktivistische Grundhaltung

Die im Folgenden beschriebenen sozialkonstruktivistischen Grundannahmen fassen Lernende als aktiv handelnde und denkende Subjekte auf. „Lernen wird als ein aktiver und konstruktiver Prozess verstanden“ (Hußmann 2002, S. 8). Lernen ist demnach ein aktiver Auseinandersetzungsprozess zwischen Individuum und Lerngegenstand (vgl. Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001, Benson 2001).

Über die individuelle Komponente hinaus, ist es die Situiertheit von Lernprozessen, die als zentrale Einflussgröße zu beachten ist: Lernen erfolgt in spezifischen Kontexten und ist an die inhaltlichen und sozialen Erfahrungen der Situation gebunden (vgl. Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001, Vergnaud 2009). „The goings-on between people in the course of their every day lives are seen as the practices during which our shared versions of knowledge are constructed (Burr 2003, S. 4). Das Zusammenspiel von umgebenden Referenzen und individuellen Vorstellungen stellt eine zentrale Komponente von Begriffsbildungsprozessen dar.

Aufbauend auf die Berücksichtigung der Situiertheit von Lernprozessen rückt der Gebrauch von Begriffen in (Sprach-) Handlungen in den Mittelpunkt. Eben solche Sprachhandlungen werden im Folgenden als jenes Moment aufgefasst, welches die Konstruktion individueller Wirklichkeit prägt – im Vergleich z.B. zum radikalen Konstruktivismus, bei dem als alleiniger Konstrukteur der individuelle Geist angesehen wird (vgl. von Tiling 2004, Von Glaserfeld 1997). Subjektive Theorien, die von einem Individuum innerhalb von Diskursen konstruiert werden, müssen innerhalb einer sozialen Realität bestehen – sie müssen viabel sein (vgl. Hußmann 2002, S. 6). Begriffsbildungsprozesse können bedeutend durch das soziale Umfeld beeinflusst werden (beispielsweise durch Äußerungen von anderen Subjekten). Begriffe werden in der Sprachgemeinschaft

(Familie, peer-group, Schulklasse, mathematische Community) gemeinsam ausgehandelt und damit brauchbar gemacht (vgl. ebd.).

Erst die Berücksichtigung des Ineinandergreifens der individuellen und sozialen Komponente von Begriffsbildung schafft ein umfassendes Bild von Entwicklungsprozessen: Die Betrachtung von Äußerungen in Begründungszusammenhängen der einzelnen Subjekte bietet die Möglichkeit, sprachlich explizit gemachte Vorstellungen, die Reaktionen eines sozialen Gegenübers, sowie die Entwicklungen von Vorstellungen während eines Lernprozesses in seiner Komplexität und Vielschichtigkeit zu erfassen.

Nachfolgend wird eine Herangehensweise an den Begriff ‚Lernen‘ dargestellt, die dem substanziellen Kern eines sozialkonstruktivistischen Vorgehens auf eine pragmatische Art und Weise Rechnung trägt (vgl. Duit 1995).

2.2 Individuelle Denkstrukturen als Vorstellungen

Eine erste Annäherung an das Konstrukt individueller Denkstrukturen geschieht mithilfe des Begriffs der Vorstellung. Dieser Begriff subsumiert eine Vielzahl an Bedeutungen und stellt einen ersten deskriptiv nutzbaren Zugang zu Begriffsbildungsprozessen dar. Der Begriff Vorstellung wird vielfach philosophisch diskutiert (vgl. u.a. Kant 1999, Hume 2004, Locke 2013) und fortwährend neu ausgelegt. Im Folgenden wird zunächst ein Begriffsverständnis ausgeschärft, welches eine pragmatische Erklärungshaltung einnimmt und hinsichtlich der Aspekte Individualität und Normativität differenziert.

Eine Möglichkeit, sich dem Begriff der Vorstellung zu nähern, kann über einen Fokus auf den Gebrauch in alltagssprachlichen Diskursen erreicht werden. Zu Äußerungen innerhalb dieses Rahmens zählt „die eigene Vorstellung beschreiben“/„Beschreiben, was ich mir vorstelle“ oder auch: „Er/Sie stellt sich vor...“. Diesem Alltagsverständnis folgend, wird der Begriff der Vorstellung genutzt, um geistige Bilder zu beschreiben, die einen vom Individuum abhängigen Zugang zu Objekten bzw. Repräsentationen von Objekten in der Welt darstellen. Aus Sicht einer konstruktivistischen Perspektive ist dabei stets die aktive Komponente auf Seiten des Individuums zu berücksichtigen. Der Begriff der Vorstellung bleibt aber trotz dieser ersten Einordnung weiterhin unscharf.

Individuelle vs. Normative Vorstellungen

Betrachtet man den Begriff ‚Vorstellung‘ unter einer Individuums-zentrierten Perspektive, so bringt die Unterscheidung von Vorstellungen in fachlich tragfähig (hier: mathematisch) und individuell eine erste Annäherung an Arten von Denkstrukturen von Individuen (vgl. Prediger 2008). Im Folgenden wird der Begriff ‚normativ‘ für eine präskriptive Sicht auf Vorstellungen verwendet, die innerhalb der wissenschaftlichen Community als mathematisch tragfähig bzw.

abgesichert gelten (vgl. ebd.). Individuelle Vorstellungen können diesem Anspruch genügen, müssen es aber nicht. Sie sind vielmehr dadurch gekennzeichnet, dass sie auf deskriptiver Ebene eine Beschreibungsmöglichkeit individueller Denkstrukturen bieten (vgl. ebd.). Da in der vorliegenden Arbeit insbesondere auch Entwicklungsverläufe von Lernprozessen beschrieben und analysiert werden, ist der Begriff der Vorstellung hinsichtlich seiner möglichen Gehalte zu konkretisieren.

Arten individueller Vorstellungen

Eine Unterteilung in operationale und strukturelle Vorstellungen (vgl. Sfard 1987) verspricht durch die Unterscheidung in eine prozess- und objektfokussierte Auffassung eine erste Möglichkeit der Differenzierung. Demnach können abstrakte mathematische Vorstellungen auf zwei Arten zum Ausdruck kommen:

- (A) *operational* (eher als Verfahren, denn als abstrakte Objekte)
- (B) *strukturell* (als feststehende Konstrukte).

Diesem Ansatz folgend, ist für die meisten Menschen der erste Schritt beim Erwerb von Vorstellungen zu einem neuen mathematischen Begriff ein operativer Zugang (vgl. Sfard 1987). Das operative Verstehen wird demnach als den strukturellen Vorstellungen vorgelagert angenommen – dem strukturellen Verständnis wird ein höherer Grad an Abstraktion zugewiesen (vgl. Sfard 1987).

Für ein vertieftes Verständnis von Mathematik ist es unverzichtbar, einen Begriff als Prozess und Objekt anzusehen und verwenden zu können. Nicht die Gegensätzlichkeit der beiden Aspekte steht dabei im Vordergrund, sondern deren Dualität: Operationale und strukturelle Auffassungen sind zwei untrennbare Facetten ein und derselben Sache (vgl. Sfard 1991). Ein ähnliches Verständnis von mathematischen Vorstellungen findet sich in der nachfolgenden dreiteiligen Stufung: Vorstellungen von Handlungen führen zu Vorstellungen über systematische Prozesse und diese zur Entwicklung von Objektvorstellungen (vgl. u.a. Dubinsky & Harel 1992). Diese Beschreibungen von Vorstellungsentwicklung sind nicht als starre Abfolge einzelner Stufen zu verstehen, sondern eher als Prozesse zu denken, in denen einzelne Verständnisse sequenziell auftauchen (vgl. Dubinsky & Harel 1992). Verläufe von Vorstellungsentwicklung verlaufen überwiegend nicht linear. Vielmehr kann es während des Prozesses immer wieder zu Sprüngen und Hürden kommen (vgl. Brousseau 1997, S. 79-83). Um ein vertieftes Verständnis eines Begriffs zu erlangen, sind solche Denkhürden zu überwinden, die sowohl didaktisch erzeugt als auch epistemologischer Natur sein können (vgl. Brousseau 1997, S. 83-100).

Diese Ansätze liefern eine gute Annäherung zur Beschreibung von Begriffsbildungsprozessen aus individueller Perspektive. Ein vollständiges Bild auf

Vorstellungen erhält man allerdings nur durch Berücksichtigung der normativen Komponente, die innerhalb des Begriffs der Vorstellung nur schwer zu verallgemeinern ist.

Vorstellungen aus einer normativen Perspektive

Um individuelle Denkstrukturen systematisch erfassen zu können, ist es erforderlich den Begriff ‚Vorstellung‘ auch aus einer normativen Perspektive zu betrachten. Aus dieser Perspektive eröffnen Vorstellungen, die mathematisch tragfähig sind, einen Blick auf den fachlichen Gegenstand. Jedoch ist es schwierig von ‚allgemeinen‘ Vorstellungen zu sprechen, da es nicht möglich ist, Vorstellungen losgelöst von einem Individuum zu betrachten. In Bezug auf einen mathematischen Gegenstand und dessen fachliche Strukturen, gibt es didaktische Brücken, Sichtweisen und Konzepte, die es einem Individuum ermöglichen mit der Welt umzugehen. Prediger (2008) spricht von einer präskriptiven („mathematical intended conceptions“) und deskriptiven („individual conceptions“) Form von Vorstellungen (S. 7 f.). Die als präskriptiv bezeichneten Vorstellungen können eine normative Rahmung für individuelle Vorstellungen auf einen mathematischen Gegenstand darstellen.

Mit der Frage nach der Spezifizierung normativer Vorstellungen, bietet das Konzept der Grundvorstellungen aus didaktischer Perspektive einen ersten Ansatzpunkt. Bereits seit dem 19. Jahrhundert nimmt dieser Begriff, wenn auch nicht immer unter derselben Bezeichnung einen festen Platz in mathematikdidaktischen Diskussionen ein (vgl. u.a. Stellvertretervorstellungen – Kühnel 1919, Vorstellungsgrundlagen – Breidenbach 1957). Für eine historische Übersicht vergleiche z.B. die Ausführungen vom Hofes zur Grundbildung mathematischer Inhalte (1995a). Diesen Begrifflichkeiten ist der Versuch gemein, Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und individuellen Vorstellungen beschreibbar zu machen (vgl. vom Hofe 1995a).

Für die fachliche Klärung innerhalb dieser Arbeit wird das Konzept der Grundvorstellungen herangezogen, um einen wichtigen Aspekt präskriptiver Vorstellungen zu spezifizieren. Insbesondere beim Erwerb von tragfähigen Vorstellungen zu einem mathematischen Begriff wird der Entwicklung von Grundvorstellungen eine hohe Bedeutung beigemessen (vgl. Prediger 2008), die in folgenden drei Positionen zum Ausdruck kommt:

- „Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen
- Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen‘, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,

- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mithilfe der mathematischen Struktur“ (vom Hofe 1995b, S. 97 ff.).

Aus präskriptiver Sicht kann das Konzept der Grundvorstellungen von Lehrenden bei der Vermittlung des mathematischen Kerns eines Lerngegenstandes herangezogen werden (vgl. vom Hofe 1995a). Vom Hofe (1995b) beschreibt diese Perspektive auf Grundvorstellungen als normativ und sachadäquat. Dadurch ergeben sich Möglichkeiten der Nutzung auf mehreren Ebenen: Zum einen können Schwerpunktsetzungen einzelner Aufgaben begründet, zum anderen Strukturentscheidungen argumentativ belegt werden. Die Lehrperson kann durch Nutzung dieser verschiedenen didaktischen Maßnahmen ein Ausbilden von Grundvorstellungen unterstützen (vgl. vom Hofe 1996). Der Ansatz der Grundvorstellungen bietet für diese Arbeit demnach eine erste gegenstandsspezififizierbare Differenzierung individueller Vorstellungen.

Ansatzpunkte der Entwicklung individueller Vorstellungen

Da Lernende ihre individuellen Vorstellungen – sei es aus dem Alltag oder aus vorangegangenen Mathematikunterricht – mit in den Unterricht hineinbringen (vgl. Smith et al. 1993), ist es von großer Bedeutung diese gewinnbringend zu integrieren. Vorunterrichtliche Vorstellungen können auf der einen Seite lernförderliche Anknüpfungspunkte darstellen, aber auch lernhinderliche Vorprägungen sein. Beim Erwerb von aus normativer Sicht tragfähigen Vorstellungen können durch die Hartnäckigkeit der in den Unterricht hineingetragenen Vorstellungen Chancen, als auch Hürden entstehen (vgl. Smith et al. 1993).

Das Lernen von Vorstellungen, die mathematisch tragfähig sind, wird in dieser Arbeit nicht als ein Ausradieren bestehender Vorstellungen und ein Ersetzen durch neue verstanden (vgl. Hußmann 2009). Vielmehr handelt es sich um ein Weiterentwickeln vorunterrichtlicher individueller Vorstellungen zu mathematisch tragfähigen Strukturen (vgl. Vogel & Wittmann 2010, S. 3). Dabei ist stets zu berücksichtigen: „Die individuellen Vorstellungen als Ausgangspunkt für die systematische Begriffsentwicklung zu verstehen“ (Hußmann 2009, S. 69). Diese Sichtweise auf Entwicklung von Vorstellungen in individuellen Lernprozessen ist an den Ansatz des ‚conceptual change‘ angelehnt (vgl. Duit 1999, Tyson et al. 1997, Posner et al. 1982). Bereits erworbene Vorstellungen müssen in Auseinandersetzung mit Lernsituationen umstrukturiert oder erweitert werden, sodass sich neue individuelle Vorstellungen aufbauen können. In diesen Prozessen ist es denkbar, dass (epistemologische und auch didaktisch erzeugte) Hürden auftreten, welche die Prozesse des *conceptual change* beeinflussen bzw. behindern (vgl. Prediger 2008).

Verortung des Begriffs der Vorstellung innerhalb erkenntnistheoretischer Diskussionen

Der Begriff der individuellen Vorstellung wird in einigen Ansätzen im Zusammenhang mit einer präskriptiven Sicht eher defizitorientiert aufgefasst, z.B. ‚students misconceptions‘ oder ‚Fehlvorstellungen‘. Konträr dazu lässt sich eine zunehmende Tendenz in aktuellen (natur-) wissenschaftlichen Diskussionen beobachten: Individuelle Vorstellungen von Lernenden – unabhängig von ihrer mathematischen Tragfähigkeit – werden als wichtiger Bestandteil aufgefasst, der in den Lernprozess zu integrieren ist (vgl. u.a. Oser et al. 1999, Spychiger et al. 2006, Gropengießer 2008, Rach et al. 2012).

Diese Arbeit führt den Begriff der individuellen Vorstellungen in der zuletzt genannten Art und Weise fort und versteht vorunterrichtliche individuelle Vorstellungen als Ressource (vgl. Smith et al. 1993). Diese gilt es im Hinblick auf den Entwicklungsfokus dieser Arbeit in das Unterrichtsdesign zu integrieren. Mit Blick auf den Forschungsfokus wird nach einer Möglichkeit gesucht, individuelle Denkstrukturen detailliert und systematisch beschreiben und analysieren zu können, ohne direkt eine Wertung, z.B. durch eine Klassifizierung als ‚misconception‘ vorzunehmen.

Betrachtet man das Wesen von Vorstellungen (lerngegenstandsspezifisch) so gibt es eine Vielzahl von Ansätzen, die dieses zu strukturieren versuchen. DeMarois/Tall (1996) haben beispielsweise einen Ansatz ausgearbeitet, welcher mit dem Element der ‚layers‘ (Schichten), die Tiefe kognitiver Prozesse auf dem Weg zu fachlich integrierten individuellen Vorstellungen zu bezeichnen versucht. Die Hierarchisierung schließt sich an die Ausführungen Dubinskys & Harels (1992) sowie Sfards (1991) an, wonach die Aneignung begrifflicher Strukturen von mentalen Handlungen ausgeht, über wiederholbare systematisierbare Verfahren abläuft und schließlich zu einem Objektverständnis führt. Wird bei Dubinsky & Harel hervorgehoben, dass diese Bereiche (einschließlich der Ebene der ‚prefunction‘) nicht als trennscharfe Stufen eines linearen Verständnisaufbaus zu denken sind, sondern häufig auch sequenziell in unterschiedlicher Abfolge sichtbar werden können, betonen DeMarois & Tall (1996) die hierarchische Rangfolge der Schichten.

Für ein detailliertes Erfassen von individuellen Vorstellungen ist auch zu berücksichtigen, dass sich Vorstellungen nicht nur überlagern können (vertikale Sichtweise), sondern sich auch nebeneinander ausbilden können (horizontale Sichtweise) (vgl. Prediger 2008). Inwiefern sich Vorstellungsentwicklungen in solchen Schichten vollziehen und wie ‚alte‘ und ‚neue‘ Vorstellungen zusammenspielen, wird im Folgenden mithilfe eines detaillierten Beschreibungszugangs ausgearbeitet.

Vorstellungsentwicklung zu mathematischen Begriffen

Die Entwicklung individueller Vorstellungen ist zentral durch den jeweiligen Lerngegenstand beeinflusst. Im Mathematikunterricht bezieht sich dies vorwiegend auf abstrakte Begriffe und damit auf die Ausbildung inhaltlicher Deutungen mathematischer Begriffe. Vorstellungsentwicklung wird hier demnach unter der Perspektive Begriffsbildung verstanden. Auf der Suche nach einer Beschreibungsmöglichkeit für die in Lernprozessen stattfindenden Begriffsbildungsprozesse bzgl. eines abstrakten mathematischen Objekts, wird im Weiteren ein Weg eingeschlagen, der den Gebrauch und Gehalt von Begriffen anhand von (sprachlich) getätigten Äußerungen fokussiert (vgl. Brandom 2001a).

Damit wird der zuvor genutzte Begriff der Vorstellung durch eine Konkretisierung dessen, was unter begrifflichem und propositionalem Gehalt verstanden werden kann, abgelöst. Dies bietet einen Ausweg, um den in der Fachsprache nicht einheitlich genutzten Begriff ‚allgemeiner, fachlich tragfähiger‘ bzw. ‚normativer‘ Vorstellungen nicht weiter zu belasten. Aufgrund der Möglichkeit den Gehalt von Begriffen sowohl aus einer normativen Perspektive zu betrachten, als auch aus der Perspektive eines Individuums im Rahmen individueller Denkstrukturen, bietet ein solcher Rahmen einen systematischen Zugang beiderlei Perspektiven – individuell und normativ – mit einer Sprache zu beschreiben.