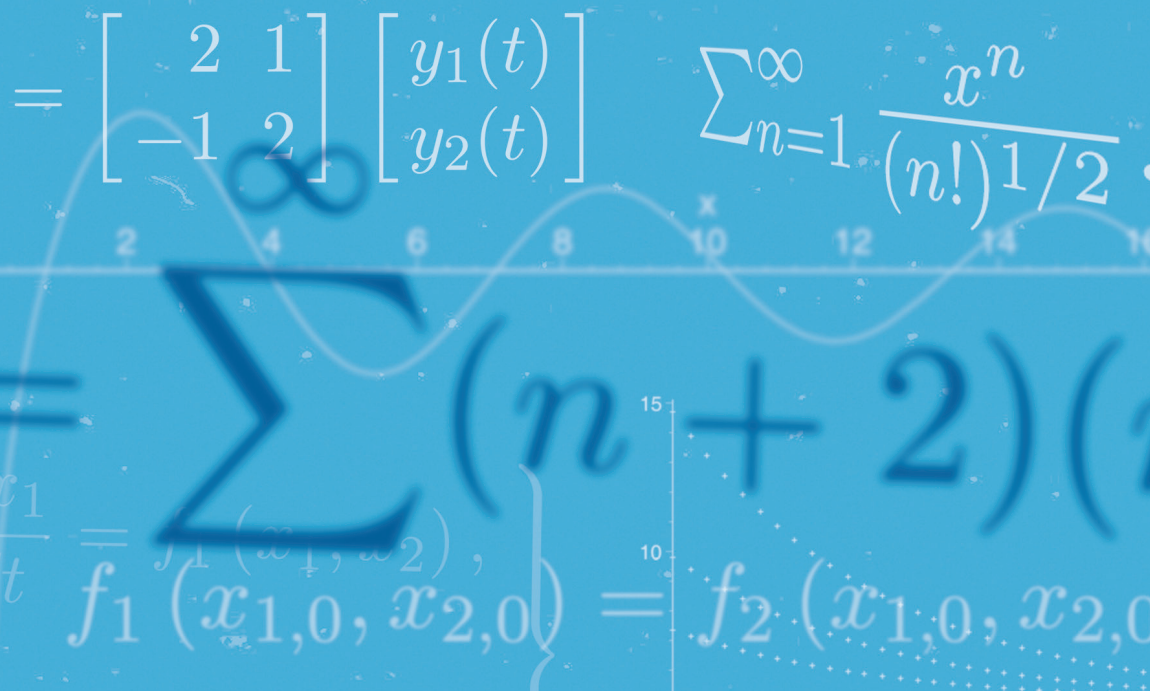




Mario Lefebvre

Équations différentielles

2^e édition revue et augmentée



ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DU MÊME AUTEUR

Aux Presses de l'Université de Montréal

Exercices corrigés d'équations différentielles, 2012.

Aux Presses internationales Polytechnique, Montréal

Cours et exercices de probabilités appliquées, 2015.

Cours et exercices de statistique mathématique appliquée, 2004.

Probabilités, statistiques et applications, 2011.

Processus stochastiques appliqués, 2014.

Chez Springer, New York

Applied Probability and Statistics, 2006.

Applied Stochastic Processes, 2007.

Basic Probability Theory with Applications, 2009.

Mario Lefebvre

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Deuxième édition revue et augmentée

Les Presses de l'Université de Montréal

Catalogage avant publication de Bibliothèque et Archives nationales du Québec et Bibliothèque et Archives Canada

Lefebvre, Mario, 1957-

Équations différentielles

Deuxième édition.

(Paramètres)

Comprend des références bibliographiques.

ISBN 978-2-7606-3618-7

1. Équations différentielles. 2. Équations différentielles - Problèmes et exercices.

I. Titre. II. Collection : Paramètres.

QA371.L43 2016

515.35

C2015-942086-5

Dépôt légal : 1^{er} trimestre 2016

Bibliothèque et Archives nationales du Québec

© Les Presses de l'Université de Montréal, 2016

ISBN (papier) 978-2-7606-3618-7

ISBN (PDF) 978-2-7606-3619-4

Les Presses de l'Université de Montréal remercient de leur soutien financier le Conseil des arts du Canada et la Société de développement des entreprises culturelles du Québec (SODEC).

Nous reconnaissons l'appui financier du gouvernement du Canada.

We acknowledge the financial support of the Government of Canada.

Canada

IMPRIMÉ AU CANADA

AVANT-PROPOS DE LA DEUXIÈME ÉDITION

Dans cette deuxième édition du manuel, plusieurs sections ont été ajoutées afin de compléter la théorie présentée dans la première édition. Par exemple, dans le dernier chapitre, il y a maintenant une section dans laquelle l'utilisation de transformées intégrales pour résoudre des équations aux dérivées partielles est présentée. De plus, il y a de nouveaux exercices à la fin de chacun des chapitres. Ces exercices sont tous tirés d'examens donnés à l'École Polytechnique de Montréal dans le cadre des cours de premier cycle sur les équations différentielles. Le nombre total d'exercices dans cette nouvelle édition du manuel s'élève à 461.

Le lecteur qui aimerait avoir les solutions des exercices proposés à la fin des sections théoriques pourra consulter le manuel complémentaire *Exercices corrigés d'équations différentielles*, du même auteur, publié par les Presses de l'Université de Montréal en 2012. Cet ouvrage comporte en effet les solutions détaillées d'exercices semblables à la plupart de ceux qui apparaissent dans les sections correspondantes du manuel principal *Équations différentielles*.

Je désire remercier mon collègue Donatien N'Dri du département de mathématiques et de génie industriel de l'École Polytechnique. Celui-ci m'a fourni plusieurs exercices intéressants qui font partie de cette deuxième édition du manuel.

Enfin, j'exprime de nouveau ma gratitude au directeur général des Presses de l'Université de Montréal, M. Antoine Del Busso, et à son équipe pour leur aide dans la réalisation de cet ouvrage.

Mario Lefebvre
Montréal, août 2015

AVANT-PROPOS

Ce livre est basé sur les notes de cours que j'ai écrites pour le cours intitulé *Équations différentielles* à l'École Polytechnique de Montréal. Ce cours est surtout pris par des étudiants de fin de première année ou début de deuxième année. On tient pour acquis que ces étudiants possèdent les notions élémentaires de calcul différentiel et d'algèbre linéaire.

Le cours enseigné à l'École Polytechnique vise à faire comprendre le rôle et la pertinence des équations différentielles en génie, maîtriser les méthodes de base permettant de résoudre les équations différentielles, et connaître quelques équations aux dérivées partielles parmi les plus importantes en génie. Dans le cas des équations aux dérivées partielles, on insiste surtout sur la méthode de séparation des variables, de concert avec les séries de Fourier, pour les résoudre.

Ce manuel comporte sept chapitres. Le premier chapitre fournit une courte introduction au domaine des équations différentielles. Ensuite, les équations différentielles ordinaires d'ordre un et d'ordre deux sont l'objet des chapitres deux et trois, respectivement. Le chapitre trois est le plus long du manuel. Cette matière constitue le noyau dur de tout cours d'introduction aux équations différentielles.

Au chapitre quatre, nous traitons des systèmes d'équations différentielles d'ordre un. Ce chapitre est suivi par celui sur les transformées de Laplace. Ces transformées sont particulièrement utiles pour résoudre des équations différentielles qui font intervenir des fonctions discontinues. Dans ce chapitre cinq, nous introduisons la fonction delta de Dirac.

Le chapitre six est consacré aux séries de Fourier, dont nous nous servons pour résoudre des équations aux dérivées partielles. Enfin, nous présentons au chapitre sept les principales équations aux dérivées partielles: l'équation de la chaleur, celle de Laplace, et l'équation d'onde. Nous présentons aussi brièvement la dérivation des ces équations.

Puisque ce livre s'adresse avant tout aux étudiants en sciences appliquées, même si nous donnons la preuve de la plupart des résultats mathématiques présentés, les exercices sont presque tous des applications de la théorie. Les étudiants doivent généralement trouver la solution explicite d'une équation différentielle donnée, sous certaines conditions.

Nous illustrons le plus souvent les concepts théoriques à l'aide d'exemples typiques. De plus, le manuel contient près de 250 exercices, dont plusieurs sont des problèmes déjà proposés en examen. Les réponses à tous les numéros pairs sont données en appendice.

Je tiens à remercier mes collègues de Polytechnique qui ont construit le cours *Équations différentielles* et en ont été les responsables: Antoine Saucier, Marc Laforest et Guy Jomphe. Leur travail m'a grandement aidé dans la rédaction de mes notes de cours, puis ensuite de ce livre.

Finalement, j'exprime ma gratitude à M. Antoine Del Busso, directeur général des Presses de l'Université de Montréal, et à son équipe pour leur intérêt envers mon travail et leur aide dans la réalisation de ce livre.

Mario Lefebvre
Montréal, novembre 2008

1 INTRODUCTION

1.1 Concept d'équation différentielle et champs de directions

Soit $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction de n variables réelles. On dit que y est une variable dépendante et que x_1, x_2, \dots, x_n sont des variables indépendantes.

Définition 1.1.1. Une équation dans laquelle apparaît (uniquement) une variable dépendante et ses dérivées par rapport à une ou plusieurs variables indépendantes est appelée **équation différentielle**.

Rappel. La dérivée dy/dx est le *taux de variation instantané* de y par rapport à x .

Exemple 1.1.1. Une équation différentielle élémentaire est l'équation

$$y'(x) = x.$$

Des équations différentielles plus intéressantes sont

$$y'(x) = y(x) \quad \text{et} \quad y'(x) = y(x) + x.$$

L'équation

$$y'(x) = y(x) + \int y(x) dx$$

est un exemple d'équation intégro-différentielle, car elle fait intervenir à la fois la dérivée de la fonction y et son intégrale. En dérivant les deux membres de l'équation, on obtient l'équation différentielle

$$y''(x) = y'(x) + y(x).$$

◇

Exemple 1.1.2. Selon la deuxième loi de Newton, l'accélération a d'un objet de masse m soumis à une force F est donnée par

$$a = \frac{1}{m} F.$$

C'est-à-dire que l'accélération est proportionnelle à la force, et la constante de proportionnalité est $1/m$. Si l'on suppose que l'objet en question est en chute libre, et si l'on ne considère d'abord que la gravité, alors

$$F = mg,$$

où la constante g (près de la surface de la terre) est environ égale à $9,8 \text{ m/s}^2$. De plus,

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2},$$

où $y [= y(t)]$ est la distance parcourue par l'objet par rapport à une hauteur fixée. Ainsi, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g.$$

Si l'on tient compte de la résistance de l'air, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g - \frac{k_0}{m} \frac{dy}{dt} := g - kv, \quad (1.1)$$

où l'on a supposé que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse $v = dy/dt$ de l'objet. La constante k_0 doit bien sûr être positive.

◇

Remarques. i) On peut réécrire l'équation (1.1) comme suit:

$$\frac{dv}{dt} = g - kv. \quad (1.2)$$

La solution $v(t) \equiv g/k$ de cette équation différentielle est appelée *solution d'équilibre*, car elle correspond au cas où la vitesse v ne change pas avec le temps t . Notons que l'on a bien $d(g/k)/dt = 0$, puisque g/k est une constante.

ii) En réalité, la résistance de l'air est (approximativement) proportionnelle à la vitesse v de l'objet dans le cas de petits objets, et pour des vitesses faibles. Pour des objets de grande taille et pour des vitesses élevées, la résistance de l'air est plutôt proportionnelle au carré v^2 de la vitesse.

iii) Nous allons souvent utiliser la notation $v'(t)$ pour la dérivée dv/dt . Lorsque la variable indépendante t représente le temps dans le problème considéré, on trouve aussi la notation $\dot{v}(t)$ pour cette dérivée, particulièrement en physique. De même, on écrit $v''(t)$ ou $\ddot{v}(t)$ pour d^2v/dt^2 , etc.

Maintenant, considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)). \quad (1.3)$$

Sans résoudre explicitement cette équation, on peut avoir une bonne idée du comportement de ses solutions en traçant (à l'aide d'un logiciel mathématique) un *champ de directions*: on évalue d'abord la fonction f en chacun des centaines de points d'une grille rectangulaire; ensuite, pour chacun des points, on trace un petit segment de droite ayant pour pente la valeur de la fonction f calculée en ce point.

Exemple 1.1.3. Supposons que $k = 2$ dans l'équation (1.2). Alors, avec $g = 9,8$, on doit résoudre

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - 2v.$$

En fait, il est facile d'obtenir la *solution générale* de cette équation différentielle, comme nous le verrons plus loin. Cependant, on peut d'abord faire tracer un champ de directions. En se servant du logiciel *Maple*, on obtient la figure 1.1. Notons que la solution d'équilibre est celle pour laquelle $v(t) \equiv 4,9$ et que la pente des segments de droite tend effectivement vers zéro près de cette valeur de v . ◇

Remarque. Les champs de directions sont surtout utiles lorsque nous ne pouvons pas résoudre explicitement l'équation différentielle correspondante.

Exercices

1-1. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) = x.$$

1-2. Trouver une solution de la forme $y(x) = -x + c$, où c est une constante à déterminer, de l'équation différentielle

$$y'(x) = y(x) + x.$$

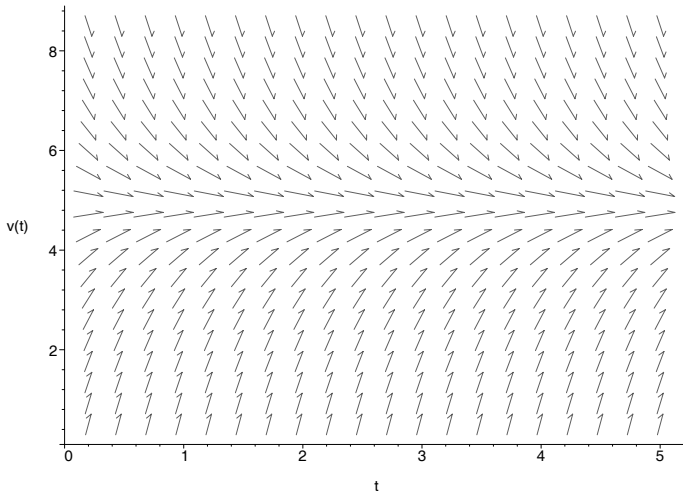


Fig. 1.1. Champ de directions pour l'exemple 1.1.2.

1-3. Transformer l'équation intégro-différentielle

$$[y'(x)]^2 = y(x) + \int y(x) dx$$

en une équation différentielle.

1-4. Trouver une solution de la forme $y(x) = e^{cx}$, où c est une constante à déterminer, de l'équation différentielle

$$y''(x) = y'(x) + y(x).$$

1-5. Déterminer la ou les solutions d'équilibre de l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) [y(t) - 1].$$

1-6. Faire tracer, par un logiciel mathématique, un champ de directions pour l'équation différentielle de l'exercice précédent.

1.2 Solutions générales et solutions particulières des équations différentielles

Supposons que l'objet en chute libre dans l'exemple 1.1.2 est immobile à l'instant initial $t = 0$. C'est-à-dire que

$$v(0) = 0. \quad (1.4)$$

Cette condition est appelée *condition initiale*. Un exemple de *problème de valeur initiale* est celui pour lequel on doit trouver la solution d'une équation différentielle comme (1.2) qui satisfait à la condition initiale (1.4).

En réécrivant l'équation (1.2) comme suit:

$$\frac{dv}{v - (g/k)} = -k dt, \quad (1.5)$$

où l'on doit supposer que $v \neq g/k$, et en intégrant les deux membres de l'équation, on obtient que

$$\ln |v - (g/k)| = -kt + c_0, \quad (1.6)$$

où c_0 est une constante d'intégration. Il s'ensuit que

$$|v - (g/k)| = \exp\{-kt + c_0\} \implies v - (g/k) = \pm \exp\{-kt + c_0\}. \quad (1.7)$$

Puisque c_0 est une constante arbitraire, on peut écrire que

$$v(t) = (g/k) + c e^{-kt}, \quad (1.8)$$

où c est une constante qui est déterminée de façon unique en utilisant la condition initiale (1.4). En effet, en posant $t = 0$ ci-dessus, on trouve que

$$0 = v(0) = (g/k) + c; \quad (1.9)$$

c'est-à-dire que

$$c = -g/k. \quad (1.10)$$

Donc, la solution du problème de valeur initiale est

$$v(t) = (g/k) \left(1 - e^{-kt}\right). \quad (1.11)$$

Remarques. i) Notons que la vitesse $v(t)$ n'est jamais égale à g/k dans la solution (1.8) si $c \neq 0$, de sorte que l'on pouvait effectivement avoir $v - (g/k)$ au dénominateur dans (1.5). Le cas où $c = 0$ est la solution d'équilibre que nous avons déjà obtenue et pour laquelle $dv/dt \equiv 0$.

ii) La fonction $v(t)$ donnée en (1.8) est la *solution générale* de l'équation différentielle (1.2). Plusieurs *solutions particulières* obtenues pour diverses valeurs de la constante c (avec $g = 9,8$ et $k = 2$) sont présentées dans la figure 1.2. La solution qui correspond à $c = -g/k = -4,9$ est la courbe continue dans le graphique.

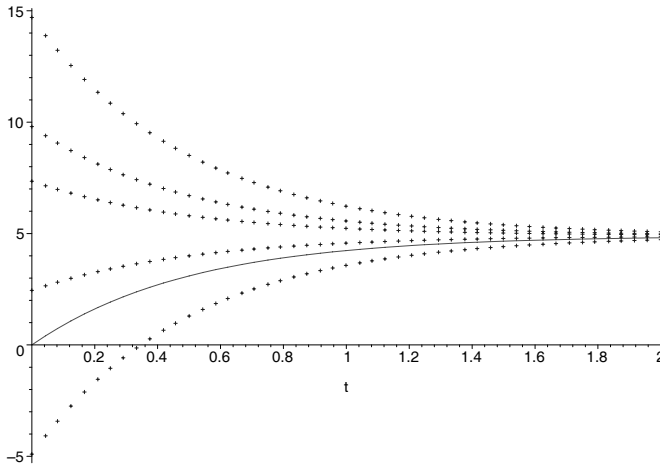


Fig. 1.2. Diverses solutions particulières de l'équation différentielle (1.2).

Exercices

1-7. Obtenir la solution particulière de l'équation différentielle

$$\frac{dv(t)}{dt} = 9,8 - 2v(t) \quad \text{pour } t > 0$$

qui satisfait à la condition initiale $v(0) = 1$.

1-8. Si $-v(t) = dy(t)/dt$ dans l'exercice précédent, et si $y(0) = 10$, pour quelle valeur t_0 de t aura-t-on $y(t_0) = 0$?

Remarques. i) Ici, $y(t)$ représente la hauteur d'un objet par rapport au sol.

ii) On peut résoudre l'équation obtenue à l'aide d'un logiciel mathématique.

1.3 Classification des équations différentielles

Définition 1.3.1. Lorsque la variable dépendante y est une fonction d'au moins deux variables indépendantes et que l'équation différentielle implique des dérivées par rapport à au moins deux de ces variables indépendantes, l'équation en question est dite **équation aux dérivées partielles**. Si l'équation différentielle ne fait intervenir qu'une ou plusieurs dérivées par rapport à une seule variable indépendante, il s'agit d'une **équation différentielle ordinaire**.

Exemple 1.3.1. L'équation (1.1) est un exemple d'équation différentielle ordinaire, car elle ne contient que des dérivées *ordinaires*, soit d^2y/dt^2 et dy/dt . Un exemple important d'équation aux dérivées partielles est l'*équation de Laplace* (en trois dimensions):

$$\nabla^2 f(x, y, z) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \quad (1.12)$$

◇

Remarque. Dans le cas des dérivées partielles, nous allons parfois remplacer $\partial f/\partial x$ par f_x , et $\partial^2 f/\partial y^2$ par f_{yy} , etc.

Supposons maintenant que les variables x et y dépendent de la variable t , et que $x(t)$ et $y(t)$ satisfont aux équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t)x + f_2(t)y, \quad (1.13)$$

$$\frac{dy}{dt} = g_1(t)x + g_2(t)y. \quad (1.14)$$

En général, pour déterminer explicitement $x(t)$ et $y(t)$, il faut résoudre les deux équations différentielles en même temps. Nous avons alors un *système d'équations différentielles*.

Définition 1.3.2. On appelle **ordre** d'une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles) l'ordre de la dérivée la plus élevée qu'elle contient.

Exemple 1.3.2. L'équation (1.1) est une équation différentielle d'ordre deux, tandis que (1.2) est une équation d'ordre un. L'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles d'ordre deux. ◇

Remarque. Dans le cas d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n , on peut écrire que

$$g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.15)$$

et on suppose qu'il est possible d'isoler $y^{(n)}$ dans l'équation, de sorte que

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.16)$$

Notons que nous utilisons la notation $y^{(n)}(t)$ pour la dérivée d'ordre n $d^n y/dt^n$, et ce, à partir de $n = 4$.

Définition 1.3.3. Une **solution** de l'équation différentielle (1.16) dans un intervalle (a, b) est une fonction (connue) y dont les dérivées d'ordre $1, 2, \dots, n$ existent dans cet intervalle et sont telles que cette équation est satisfaite.

Définition 1.3.4. Une équation différentielle est dite **linéaire** si elle n'implique que des fonctions linéaires de la variable dépendante et de toutes les dérivées qu'elle contient.

Exemple 1.3.3. L'équation (1.15) est linéaire si et seulement si on peut écrire que

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = h(t).$$

Un exemple d'équation différentielle non linéaire est le suivant:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (1.17)$$

◇

Remarque. Parfois, en utilisant des approximations, il est possible de *linéariser* une équation différentielle non linéaire.

Exercices

1-9. Trouver toutes les solutions de la forme

$$f(x, y, z) = ax^2 + by + cz^2$$

de l'équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

où a, b et c sont des constantes à déterminer.

1-10. Déterminer l'ordre des équations différentielles suivantes:

(a) $[y'(x)]^2 = y(x) + y^3(x)$;

(b) $y''(x) = \frac{1}{y(x)} + x^4$;

(c) $y(x)y'(x) = e^{y(x)} + y^3(x)$;

(d) $e^{y'(x)} = \frac{1}{y'''(x)} + y^4(x)$.

1-11. Isoler $y''(x)$ dans les équations différentielles suivantes:

(a) $y'(x)e^{y''(x)} = y'(x) + y^2(x)$;

(b) $[y''(x) + y'(x)]^2 = e^{y(x)} + x^2$.

1-12. Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires ou non linéaires:

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$;

(b) $\exp\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$;

(c) $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + x = 0$;

(d) $y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + e^y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

1-13. Trouver toutes les solutions de l'équation de Laplace en deux dimensions:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

qui sont de la forme $f(x, y) = ax + bx^2 + cy^2$, où a , b et c sont des constantes à déterminer.

1.4 Exercices supplémentaires

1-14. Trouver une solution de la forme

$$y(x) = ce^{x^2/2} + c_0$$

de l'équation différentielle ordinaire

$$y'(x) = x[y(x) + 1].$$

1-15. On considère l'équation intégro-différentielle

$$y(x)y'(x) = y(x) \int y(x) dx + 1.$$

(a) Transformer cette équation en une équation différentielle pour $y(x)$.

(b) Dire si l'équation différentielle obtenue est linéaire ou non.

1-16. Quel est l'ordre des équations différentielles suivantes? Sont-elles linéaires ou non linéaires?

(a) $y'(t) + t^3 y^2(t) = 0$;

(b) $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + x^3 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = e^{xy}$.

1-17. Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires ou non linéaires:

(a) $y''(t) + t^2 y'(t) + y(t) = e^t$;

(b) $y^{(4)}(t) + y'(t) = \cos t$;

(c) $y'(t) + y^{-1}(t) = t$;

(d) $y'''(t) + y'(t)y(t) = 0$.

1-18. (a) Déterminer la ou les solutions d'équilibre de l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^{1/2}(t) [y^{1/2}(t) - 1].$$

(b) Trouver une solution de la forme $y(t) = (e^{ct} + 1)^2$, où c est une constante à déterminer, de l'équation différentielle en (a).

1-19. Trouver toutes les solutions de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

qui sont de la forme $u(x, t) = e^{ct} [\cos(ax) + \sin(bx)]$, où a , b et c sont des constantes à déterminer.

1-20. Le champ de directions dans la figure 1.3 a été tracé par le logiciel *Maple* à partir d'une équation différentielle d'ordre un pour la fonction $y(x)$.

(a) Donner la forme des solutions de l'équation différentielle en question.

(b) Quelle est l'équation différentielle à laquelle la fonction $y(x)$ satisfait?

1-21. Trouver toutes les solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

qui peuvent être écrites sous la forme $f(x, y) = g(z)$, où $z := x + y$.

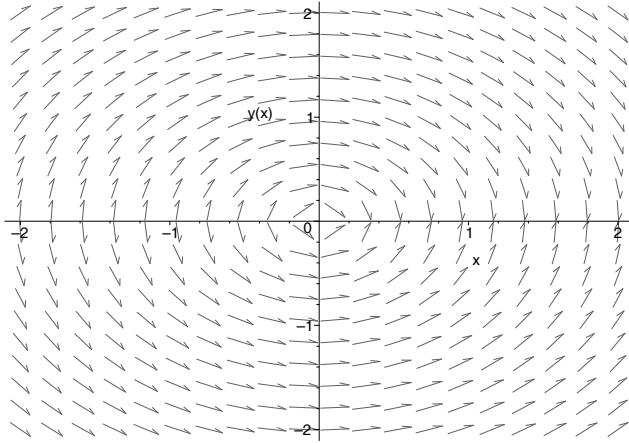


Fig. 1.3. Champ de directions pour l'exercice 1-20.

2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES D'ORDRE UN

2.1 Équations à variables séparables

Considérons l'équation différentielle ordinaire du premier ordre (ou d'ordre un)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2.1)$$

On peut toujours la réécrire sous la forme

$$N(x, y) \frac{dy}{dx} + M(x, y) = 0 \iff N(x, y) dy + M(x, y) dx = 0. \quad (2.2)$$

Définition 2.1.1. *Si on peut écrire que $M(x, y) = M(x)$ et $N(x, y) = N(y)$ dans l'équation (2.2), de sorte que*

$$M(x) dx + N(y) dy = 0, \quad (2.3)$$

alors on dit qu'il s'agit d'une équation différentielle à variables séparables.

Pour résoudre l'équation différentielle (2.3), on la réécrit d'abord sous la forme

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0 \iff \frac{d}{dx} \left[\int M(x) dx + \int N(y) dy \right] = 0, \quad (2.4)$$

où on a utilisé le fait que

$$\frac{dg(y)}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \frac{dy}{dx}. \quad (2.5)$$

Ensuite, il suffit d'intégrer les deux membres de l'équation par rapport à x :

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = c, \quad (2.6)$$

où c est une constante arbitraire. On peut aussi écrire que

$$\int^x M(u) du + \int^y N(u) du = c. \quad (2.7)$$

Remarque. L'équation ci-dessus donne une *solution implicite* de l'équation différentielle (2.3). Pour obtenir une *solution explicite*, il faut isoler y dans l'équation, ce qui est généralement difficile ou même impossible.

Si on impose la condition $y(x_0) = y_0$, alors on trouve que la solution qui satisfait à cette condition est telle que

$$\int^{x_0} M(u) du + \int^{y_0} N(u) du = c. \quad (2.8)$$

Il s'ensuit [en soustrayant l'équation (2.8) de l'équation (2.7)] que

$$\int_{x_0}^x M(u) du + \int_{y_0}^y N(u) du = 0. \quad (2.9)$$

Exemple 2.1.1. Considérons l'équation différentielle non linéaire

$$y'(x) = -\frac{x^2(y-2)}{(x+2)y^2}.$$

On peut la réécrire comme suit:

$$\frac{y^2}{y-2} dy + \frac{x^2}{x+2} dx = 0 \quad (\text{si } y \neq 2)$$

\Leftrightarrow

$$\left(y + 2 + \frac{4}{y-2}\right) dy + \left(x - 2 + \frac{4}{x+2}\right) dx = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}y^2 + 2y + 4 \ln |y-2| + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \ln |x+2| = c.$$

On ne peut malheureusement pas isoler y dans cette équation pour obtenir une solution explicite. Par contre, dans le cas de l'équation différentielle

$$y'(x) = -\frac{x^2}{y^2},$$

on trouve que

$$y^2 dy + x^2 dx = 0 \implies \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}x^3 = c.$$

Puisque c est arbitraire, on déduit que

$$y^3 + x^3 = c_0 \implies y = (c_0 - x^3)^{1/3}.$$

Supposons que $y(0) = 1$. Alors on obtient que $c_0 = 1$, de sorte que

$$y(x) = (1 - x^3)^{1/3}.$$

◇

Remarque. La solution ci-dessus est valable pour toute valeur réelle de x . Par contre, dans le cas de la première équation différentielle considérée dans cet exemple, on voit qu'il faut (au moins) que la variable indépendante x soit supérieure à -2 ou inférieure à -2 . C'est-à-dire que l'*intervalle de validité* (a, b) de la solution est (au plus) l'intervalle $(-2, \infty)$ ou l'intervalle $(-\infty, -2)$.

2.1.1 Équations homogènes

Certaines équations qui ne sont pas à variables séparables peuvent être transformées en équations à variables séparables à l'aide d'un changement de variable approprié.

Définition 2.1.2. La fonction $f(x, y)$ est dite **homogène de degré n** si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \tag{2.10}$$

pour un $n \in \{0, 1, \dots\}$.

Remarque. Il peut y avoir des contraintes sur les variables x , y et t .

Définition 2.1.3. L'équation différentielle

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \tag{2.11}$$

est dite **homogène** si les fonctions M et N sont homogènes de même degré.

Remarques. i) De façon équivalente, on peut affirmer que l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.12)$$

est homogène si et seulement si la fonction $f(x, y)$ est homogène de degré 0.

ii) Le terme *homogène* est aussi utilisé pour décrire une équation différentielle dans laquelle n'apparaît que des fonctions de la variable dépendante y et de ses dérivées. Par exemple,

$$y'(x) + y(x) = 0 \quad (2.13)$$

est homogène, mais pas

$$y'(x) + y(x) = x. \quad (2.14)$$

Le contexte d'utilisation devrait permettre d'éviter la confusion entre les deux sens du terme homogène.

Pour résoudre une équation différentielle homogène, on pose

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (2.15)$$

et on définit $u = y/x$. On a:

$$f(tx, ty) = -\frac{M(tx, ty)}{N(tx, ty)} = -\frac{t^n M(x, y)}{t^n N(x, y)} = f(x, y). \quad (2.16)$$

En choisissant $t = 1/x$, on obtient que

$$f(1, u) = f(x, y). \quad (2.17)$$

Maintenant, puisque $y = xu$, on peut écrire que

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \implies u + x \frac{du}{dx} = f(1, u). \quad (2.18)$$

Si $f(1, u) = u$, alors $u \equiv c$ et $y(x) = cx$. Dans le cas où $f(1, u) \neq u$, on peut séparer les variables:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(1, u) - u}. \quad (2.19)$$

Exemple 2.1.2. L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}$$

n'est pas directement à variables séparables. Cependant, on peut écrire que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - (y/x)}{1 + (y/x)} \quad \xrightarrow{u=y/x} \quad u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 - u}{1 + u},$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\frac{1-u}{1+u} - u} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} dx = \frac{1 + u}{1 - 2u - u^2} du.$$

En intégrant de chaque côté, on trouve que

$$-\frac{1}{2} \ln |1 - 2u - u^2| = \ln |x| + c \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} \ln |1 - 2(y/x) - (y/x)^2| = \ln |x| + c$$

(que l'on peut simplifier). ◇

Remarque. L'équation différentielle dans l'exemple précédent est homogène, car $M(x, y) = -(x - y)$ et $N(x, y) = x + y$ sont homogènes de degré 1, ou bien $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ est homogène de degré 0.

Exercices

2-1. Résoudre (explicitement, si possible) les équations différentielles ordinaires suivantes:

- (a) $x^2 dx + \frac{y}{y+1} dy = 0$;
- (b) $\frac{x}{x+1} dx + y^2 dy = 0$ pour $x > -1$;
- (c) $\sin(x) \cos(x) dx + ye^y dy = 0$;
- (d) $\frac{\ln x}{x} dx + \frac{y^2}{y+1} dy = 0$ pour $x > 0$.

2-2. Séparer, si possible, les variables dans les équations suivantes:

- (a) $y'(x) = \frac{x + e^x}{x^2 y^2}$;
- (b) $y'(x) = \frac{x e^x}{x^2 + y^2}$;

$$(c) y'(x) = \frac{y + e^y}{x^2 y^2};$$

$$(d) y'(x) = \frac{y e^y}{x^2 + y^2}.$$

2-3. Déterminer si les équations différentielles suivantes sont homogènes:

$$(a) (x + y) dx + (x + 2y) dy = 0;$$

$$(b) (x^2 + y^2) dx + x y dy = 0;$$

$$(c) (x + y) dx + \cos(y) dy = 0;$$

$$(d) x^2 dx + y dy = 0;$$

$$(e) dx + \frac{x + y}{x - y} dy = 0.$$

2-4. Résoudre les équations différentielles ordinaires homogènes suivantes:

$$(a) y'(x) = \frac{x y}{x^2 + y^2};$$

$$(b) y'(x) = \frac{y^3}{x(x^2 + y^2)};$$

$$(c) y'(x) = \frac{x}{x + 2y}.$$

2.2 Équations exactes

Dans la section précédente, nous avons considéré le cas où les fonctions $M(x, y)$ et $N(x, y)$ dans l'équation différentielle

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \tag{2.20}$$

sont telles que $M(x, y) = M(x)$ et $N(x, y) = N(y)$, de sorte que l'équation en question est à *variables séparables*. Supposons maintenant qu'il existe une fonction $f(x, y)$ pour laquelle

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y). \tag{2.21}$$

Alors l'équation (2.20) peut être réécrite comme suit:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad \iff \quad df(x, y) = 0. \tag{2.22}$$

C'est-à-dire que le membre gauche de l'équation différentielle (2.20) est la *différentielle totale* ou *exacte* de la fonction $f(x, y)$. Il s'ensuit que la solution générale de l'équation est donnée implicitement par

$$f(x, y) = c, \quad (2.23)$$

où c est une constante arbitraire.

Définition 2.2.1. *Si (et seulement si) il existe une fonction $f(x, y)$ telle que les équations (2.21) sont vérifiées, on dit que l'équation (2.20) est une **équation différentielle exacte**.*

Si l'équation (2.20) est exacte, alors la fonction f existe. On peut écrire que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad (2.24)$$

sous l'hypothèse que les dérivées partielles mixtes existent et sont continues. Cette équation est équivalente à

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (2.25)$$

Donc, on peut affirmer que l'équation différentielle (2.20) est exacte *seulement si* l'équation (2.25) est vérifiée. C'est-à-dire que (2.25) est une *condition nécessaire* pour que l'équation différentielle considérée soit exacte.

Remarque. Lorsqu'on calcule les dérivées partielles $\partial M(x, y)/\partial y$ et $\partial N(x, y)/\partial x$, on considère x et y comme des variables indépendantes. De même, ci-dessous, la variable y est considérée comme une constante lorsqu'on intègre par rapport à x .

Ensuite, on a:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \implies f(x, y) = \int M(x, y) dx + h(y), \quad (2.26)$$

où $h(y)$ est une fonction arbitraire qui ne dépend que de y . Cette fonction doit être telle que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \iff \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + h'(y) = N(x, y). \quad (2.27)$$

De là, on déduit que

$$h(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) \right] dy. \quad (2.28)$$

Puisque l'intégrale ci-dessus doit être une fonction de y seulement, la fonction que l'on intègre ne doit pas dépendre de x . Il s'ensuit que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) \right] = 0. \quad (2.29)$$

C'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) \\ \iff \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\int M(x, y) dx \right) \\ \iff \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Or, cette dernière équation est la condition (2.25). Ainsi, si cette condition est vérifiée, on peut construire une fonction f telle que les équations dans (2.21) sont aussi satisfaites. On peut donc énoncer la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *L'équation différentielle (2.20) est exacte si et seulement si (ssi) l'équation (2.25) est vérifiée. Ainsi, l'équation (2.25) est une condition nécessaire et suffisante pour que (2.20) soit une équation différentielle exacte.*

Exemple 2.2.1. Soit $M(x, y) = x^2 + y$ et $N(x, y) = x - y^2$. On a :

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 1.$$

Alors l'équation

$$(x^2 + y) dx + (x - y^2) dy = 0$$

est exacte. Il existe donc une fonction $f(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y.$$

De là, on obtient l'expression suivante pour la fonction $f(x, y)$ que l'on cherche :