



# Introducción a la teoría de la probabilidad

MIGUEL ÁNGEL GARCÍA ÁLVAREZ

PRIMER CURSO



**MIGUEL ÁNGEL  
GARCÍA ÁLVAREZ**

cursó la licenciatura en matemáticas  
en la Facultad de Ciencias de la UNAM.  
Realizó sus estudios de posgrado, en teoría de  
los procesos estocásticos, en la Universidad  
de Estrasburgo, bajo la dirección del doctor  
Paul André Meyer. Actualmente es profesor  
titular del Departamento de Matemáticas  
de la UNAM.



SECCIÓN DE OBRAS DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

---

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

*Primer curso*

## **Comité de Selección**

Dr. Antonio Alonso  
Dr. Francisco Bolívar Zapata  
Dr. Javier Bracho  
Dr. Juan Luis Cifuentes  
Dra. Rosalinda Contreras  
Dr. Jorge Flores Valdés  
Dr. Juan Ramón de la Fuente  
Dr. Leopoldo García-Colín Scherer  
Dr. Adolfo Guzmán Arenas  
Dr. Gonzalo Halffter  
Dr. Jaime Martuscelli  
Dra. Isaura Meza  
Dr. José Luis Morán  
Dr. Héctor Nava Jaimes  
Dr. Manuel Peimbert  
Dr. José Antonio de la Peña  
Dr. Ruy Pérez Tamayo  
Dr. Julio Rubio Oca  
Dr. José Sarukhán  
Dr. Guillermo Soberón  
Dr. Elías Trabulse

## **Coordinadora**

María del Carmen Farías R.

MIGUEL ÁNGEL GARCÍA ÁLVAREZ

# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD



*Primer curso*



FONDO DE CULTURA ECONÓMICA

Primera edición, 2005  
Primera reimpresión, 2008

---

García Álvarez, Miguel Ángel

Introducción a la teoría de la probabilidad. Primer curso / Miguel Ángel García Álvarez. — México : FCE, 2005

454 p. : il. ; 23 × 17 cm — (Colec. Obras de Ciencia y Tecnología)

ISBN 978-968-16-7514-1 (primer curso)  
978-968-16-7578-3 (obra completa)

1. Probabilidad, teoría de 2. Probabilidad — Historia  
3. Matemáticas I. Ser. II. t.

LC QA273.2

Dewey 519.2 G 532i

---

*Distribución mundial*

Comentarios y sugerencias: [laciencia@fondodeculturaeconomica.com](mailto:laciencia@fondodeculturaeconomica.com)  
[www.fondodeculturaeconomica.com](http://www.fondodeculturaeconomica.com)  
Tel. (55)5227-4672 Fax (55)5227-4694

 Empresa certificada ISO 9001: 2000

D. R. © 2005, FONDO DE CULTURA ECONÓMICA  
Carretera Picacho-Ajusco, 227, 14738 México, D. F.

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra —incluido el diseño tipográfico y de portada—, sea cual fuere el medio, electrónico o mecánico, sin el consentimiento por escrito del editor.

ISBN 978-968-16-7514-1 (Primer curso)  
ISBN 978-968-16-7578-3 (obra completa)

Impreso en México • *Printed in Mexico*

## ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO . . . . .	11
NOTACIÓN . . . . .	15
UN POCO DE HISTORIA . . . . .	17
Bibliografía . . . . .	23

### PRIMERA PARTE

#### *El cálculo de probabilidades*

[27]

I. EL MODELO MATEMÁTICO . . . . .	29
I.1 Experimentos aleatorios . . . . .	29
I.2 Eventos . . . . .	34
I.3 Principio de regularidad de las frecuencias . . . . .	37
I.4 El concepto de probabilidad . . . . .	39
I.5 Espacios muestrales . . . . .	40
I.6 Representación de eventos . . . . .	42
I.7 Composición de eventos . . . . .	44
I.8 Funciones de probabilidad . . . . .	48
I.9 Ejercicios . . . . .	50
II. LAS REGLAS BÁSICAS . . . . .	51
II.1 Algunas propiedades elementales . . . . .	51
II.2 Propiedad de la aditividad finita . . . . .	52
II.3 Regla de la suma . . . . .	53
II.4 Elecciones al azar y resultados equiprobables . . . . .	54
II.5 probabilidad condicional . . . . .	57
II.6 Regla del producto . . . . .	62
II.7 Independencia estocástica . . . . .	66
II.8 Interpretación objetiva y subjetiva de la probabilidad . . . . .	75

II.9 Ejercicios . . . . .	77
III. MUESTREO ALEATORIO . . . . .	85
III.1 Muestreo aleatorio con reemplazo . . . . .	85
III.2 Muestreo aleatorio ordenado sin reemplazo . . . . .	87
III.3 Muestreo aleatorio no ordenado sin reemplazo . . . . .	89
III.4 Coeficientes binomiales . . . . .	99
III.5 Ejercicios . . . . .	102
IV. COMBINANDO LAS REGLAS BÁSICAS . . . . .	111
IV.1 Regla de la probabilidad total . . . . .	111
IV.2 Regla de Bayes . . . . .	124
IV.3 Ejercicios . . . . .	130
V. LA ADITIVIDAD NUMERABLE . . . . .	137
V.1 Espacios muestrales infinitos numerables . . . . .	137
V.2 probabilidades geométricas . . . . .	154
V.3 Sucesiones infinitas de ensayos de Bernoulli . . . . .	161
V.4 El problema de la medida . . . . .	165
V.5 Espacios de probabilidad . . . . .	169
V.6 Teorema de clases monótonas . . . . .	172
V.7 Los borelianos y la medida de Lebesgue . . . . .	178
V.8 Funciones borelianas . . . . .	184
V.9 Ejercicios . . . . .	187
Bibliografía . . . . .	190

## SEGUNDA PARTE

### *Variables aleatorias*

[193]

VI. VARIABLES ALEATORIAS . . . . .	195
VI.1 Variables aleatorias reales . . . . .	196
VI.2 Funciones de distribución . . . . .	198
VI.3 Clasificación de variables aleatorias . . . . .	201
VI.4 Independencia de variables aleatorias . . . . .	211
VI.5 Función gama . . . . .	213
VI.6 Fórmulas de Wallis y de Stirling . . . . .	215

VI.7	Ejercicios . . . . .	219
VII.	VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS . . . . .	221
VII.1	Distribución binomial . . . . .	221
VII.2	Distribución geométrica . . . . .	229
VII.3	Distribución binomial negativa . . . . .	231
VII.4	Distribución Poisson . . . . .	236
VII.5	Distribución hipergeométrica . . . . .	243
VII.6	Otras distribuciones . . . . .	249
VII.6.1	Distribuciones truncadas . . . . .	249
VII.6.2	Distribución uniforme discreta . . . . .	250
VII.7	Caminatas aleatorias . . . . .	252
VII.7.1	Distribución de la posición en el $n$ -simo paso . . . . .	253
VII.7.2	Retornos al origen . . . . .	254
VII.7.3	Distribución del tiempo del primer retorno al origen . . . . .	258
VII.7.4	Primer paso por un valor positivo . . . . .	258
VII.7.5	Distribución del tiempo de primer paso por un valor positivo . . . . .	260
VII.8	Ejercicios . . . . .	260
VIII.	VARIABLES ALEATORIAS ABSOLUTAMENTE CONTINUAS . . . . .	267
VIII.1	Distribución uniforme continua . . . . .	267
VIII.2	Distribución normal . . . . .	271
VIII.3	Teorema de de Moivre-Laplace . . . . .	274
VIII.4	Distribución exponencial . . . . .	287
VIII.5	Distribución gama . . . . .	291
VIII.6	Distribuciones uniformes en el plano . . . . .	295
VIII.7	Distribución de funciones de variables aleatorias conti- nuas . . . . .	297
VIII.8	Simulación de distribuciones . . . . .	299
VIII.9	Ejercicios . . . . .	305
IX.	ESPERANZAS . . . . .	311
IX.1	Esperanza de variables aleatorias discretas . . . . .	314
IX.2	Esperanza de variables aleatorias absolutamente conti- nuas . . . . .	316
IX.3	Algunas ideas erróneas . . . . .	316

IX.4	Definición general de la esperanza . . . . .	320
IX.5	Esperanza de funciones de variables aleatorias . . . . .	328
IX.6	Propiedades de la esperanza . . . . .	331
IX.7	Varianza y demás momentos . . . . .	345
IX.8	Desigualdad de Chebyshev . . . . .	360
IX.9	Funciones generadoras . . . . .	366
	IX.9.1 Función generadora de probabilidades . . . . .	367
	IX.9.2 Función generadora de momentos . . . . .	376
IX.10	Ejercicios . . . . .	383
APÉNDICE . . . . .		395
A.1	Sucesiones de números reales . . . . .	395
A.2	Series de números reales . . . . .	400
A.3	La integral de Riemann . . . . .	403
A.4	La integral de Lebesgue . . . . .	413
	A.4.1 Funciones medibles . . . . .	414
	A.4.2 La integral de funciones medibles no negativas . . . . .	418
	A.4.3 Funciones integrables . . . . .	422
	A.4.4 La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	427
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS . . . . .		431
	Capítulo I . . . . .	431
	Capítulo II . . . . .	431
	Capítulo III . . . . .	433
	Capítulo IV . . . . .	436
	Capítulo V . . . . .	438
	Capítulo VI . . . . .	438
	Capítulo VII . . . . .	439
	Capítulo VIII . . . . .	441
	Capítulo IX . . . . .	444
TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR . . . . .		449
ÍNDICE DE TÉRMINOS . . . . .		451

## PRÓLOGO

El universo es un gigantesco sistema termodinámico. En todos los niveles encontramos inestabilidades y bifurcaciones. En esta perspectiva podemos preguntarnos por qué durante tanto tiempo el ideal de la física estuvo asociado con la certidumbre, es decir con la negación del tiempo y la creatividad. . . En ciencia, la búsqueda de certidumbres encontró finalmente su expresión suprema en las “leyes de la naturaleza”, asociadas a la obra de Newton. . . Lo que emerge hoy es una descripción mediatriz, situada entre dos representaciones alienantes: la de un mundo determinista y la de un mundo arbitrario sometido al puro azar. Las leyes no gobiernan el mundo, pero tampoco éste es regido por el azar. Las leyes físicas corresponden a una nueva forma de inteligibilidad, expresada en las representaciones probabilísticas irreductibles. . . Distinguimos nuevos horizontes, nuevas preguntas, nuevos riesgos. Vivimos un momento privilegiado de la historia de la ciencia.

ILYA PRIGOGINE

ESTE LIBRO ESTÁ CONCEBIDO como introductorio a la *teoría de la probabilidad*. Se presenta en él todo el material que forma parte del programa de los dos primeros cursos de probabilidad que se ofrecen en varias universidades. El primer volumen comprende los temas correspondientes al primer curso y el segundo volumen comprende los del segundo curso.

A este nivel introductorio, la teoría de la probabilidad utiliza como herramienta matemática básica el *cálculo combinatorio*, la *teoría de series* de números reales y el *cálculo diferencial e integral* en una y varias variables, de manera que, para el primer volumen se asume el conocimiento de los dos primeros de estos temas así como del cálculo en una variable, mientras que para el segundo volumen se asume además el conocimiento del cálculo en varias variables.

En esta obra se pretende presentar una introducción a la formulación moderna de la teoría de la probabilidad, intentando combinar diferentes aspectos: se busca la motivación heurística de los conceptos, se trata de ubicar el origen de ellos y se exponen los resultados con el mayor rigor posible. Esta última tarea presenta dificultades, pues la teoría de la probabilidad moderna requiere, como herramienta básica, de la *teoría de la medida*, la cual no es conocida por la mayor parte de los lectores a quienes está dirigido este libro. Para salvar esta dificultad, se introducen, a lo largo de los dos volúmenes, los elementos que se necesitan para entender algunos conceptos probabilísticos básicos y contar con la herramienta que permite demostrar los resultados que se exponen. Con el mismo propósito, se incluye un Apéndice en el cual, entre otros temas, se exponen los conceptos y resultados básicos de la *teoría de integración* de Lebesgue.

Como se muestra en este primer volumen, el método para calcular probabilidades consiste en comenzar asignando probabilidades a una determinada familia de eventos y después, utilizando las propiedades de la función de probabilidad, se trata de extender ésta a una familia de eventos tan grande como sea posible. El enfoque de este libro es probabilístico en el sentido de que, para resolver cualquier problema, antes que otra cosa, se busca llevar este método tan lejos como sea posible, en lugar de intentar reducirlo, desde el inicio, a un problema de otro tipo, como pudiera ser uno de cálculo combinatorio.

La teoría de la probabilidad surge del estudio de los fenómenos aleatorios. El primer problema a resolver en este estudio consiste en encontrar un modelo matemático que permita analizar a profundidad el fenómeno en consideración. El modelo utilizado en este libro es el que formuló Andrey Nikolaevich Kolmogorov en el año 1933. Para un estudiante que se inicia en la teoría de la probabilidad no resulta simple entender el por qué se utiliza este modelo, lo cual es muy explicable por el hecho de que éste es el resultado de un proceso de investigación en el cual estuvieron involucrados muchos estudiosos del tema y, por lo general, no se muestra al alumno más que la conclusión del proceso. En este libro se profundiza en este tema buscando dar mayor claridad al estudiante.

Este primer volumen está dividido en dos grandes partes: en la primera se desarrolla el método para calcular probabilidades y se presentan las reglas básicas; en la segunda se hace el estudio de las variables aleatorias, concepto básico en la teoría de la probabilidad.

A su vez, la primera parte se divide en cinco capítulos: en el primero se definen los conceptos básicos del cálculo de probabilidades y se comienza a construir el modelo matemático de los fenómenos aleatorios; en el segundo se formulan las propiedades que permiten extender la función de probabilidad, definida en el capítulo I, además de introducir los conceptos de probabilidad condicional y de independencia así como las reglas que se relacionan con ellos; en el tercer capítulo se estudian diferentes maneras en que se puede seleccionar una familia de elementos de una colección dada; en el cuarto capítulo se integra lo estudiado en los 3 primeros capítulos para formular las reglas generales del cálculo de probabilidades; finalmente, en el quinto capítulo se completa el modelo matemático de los fenómenos aleatorios introduciendo la propiedad que facilita el estudio de aquellos cuyo conjunto de posibles resultados es infinito; de esta forma, queda formulado el modelo de Kolmogorov, el cual será la base para los capítulos posteriores.

La segunda parte se divide en cuatro capítulos: en el primero se hace un estudio general de las variables aleatorias, además de formular algunos resultados de cálculo integral que serán de utilidad más adelante; en el segundo y tercero se estudian las familias básicas de variables aleatorias; finalmente, en el cuarto, se introduce y se estudia otro concepto fundamental de la teoría de la probabilidad, el de *esperanza*.

MIGUEL A. GARCÍA ÁLVAREZ

*Marzo, 2004*

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias, UNAM

México, D.F., 04510

e-mail: [magaz@servidor.unam.mx](mailto:magaz@servidor.unam.mx)



## NOTACIÓN

$A \cup B$	Unión de los conjuntos $A$ y $B$
$A \cap B$	Intersección de los conjuntos $A$ y $B$
$\bigcup_{k=1}^n A_k$	Unión de los conjuntos $A_1, \dots, A_n$
$\bigcap_{k=1}^n A_k$	Intersección de los conjuntos $A_1, \dots, A_n$
$A^c$	Complemento del conjunto $A$
$A \times B$	Producto cartesiano de los conjuntos $A$ y $B$
$A \subset B$	El conjunto $A$ está contenido en el conjunto $B$
$A \supset B$	El conjunto $A$ contiene al conjunto $B$
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\{n, \dots, m\}$	Conjunto de números enteros entre $n$ y $m$ inclusive
$\{n, n + 1 \dots\}$	Conjunto de números enteros mayores o iguales a $n$
$(a, b)$	Intervalo abierto $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b]$	Intervalo cerrado $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$	Intervalo semiabierto $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a, b)$	Intervalo semiabierto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$x \cdot y$	Producto punto de los vectores $x$ y $y$
$\ x\ $	Norma del vector $x$
$ x $	Valor absoluto del número real $x$
$[[x]]$	Mayor entero menor o igual a $x$
$\bar{z}$	Conjugado del número complejo $z$
$\text{mín}(a, b)$	Mínimo entre $a$ y $b$
$\text{máx}(a, b)$	Máximo entre $a$ y $b$
$x^+$	$\text{máx}(x, 0)$
$x^-$	$\text{máx}(-x, 0)$
$\sum_{k=1}^n x_k$	Suma de los números $x_1, \dots, x_n$
$\prod_{k=1}^n x_k$	Producto de los números $x_1, \dots, x_n$
$\ln x$	Logaritmo natural de $x$
$\binom{n}{k}$	Combinaciones de $n$ elementos tomados de $k$ en $k$
$g \circ f$	Composición de las funciones $f$ y $g$
$f : A \mapsto B$	función definida sobre el conjunto $A$ , con valores en el conjunto $B$
$x \rightsquigarrow \alpha$	$x$ tiende al valor $\alpha$

## UN POCO DE HISTORIA

*Le 29 juillet 1654*

*Monsieur,*

*L'impatiente me prend aussi bien qu'a vous ; et quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort, que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'etendre ; mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse ; j'en suis tout satisfait ; car je ne dout plus maintenant que je suis dans la verité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous... j'en ai trouvé un abrégé, et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots ; car je voudrais désormais vous ouvrir mon coeur, s'il se pouvait, tant que j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la verité est la même à Toulouse et à Paris.*

CARTA DE PASCAL A FERMAT

EL SURGIMIENTO del cálculo de probabilidades, como disciplina matemática independiente, tiene como base las soluciones que, durante el periodo que va del año 1654 al 1657, dieron Blaise Pascal, Pierre de Fermat ([12]) y Christiaan Huygens ([14]) a varios problemas, entre los cuales destacan los siguientes:

PROBLEMA 1. *¿Cómo deben repartirse las apuestas en un juego que se interrumpe? Por ejemplo, suponiendo que dos jugadores, A y B, apuestan 32 pesos cada uno en un juego que consiste de partidas consecutivas, en cada una de las cuales cada jugador tiene la misma posibilidad de ganarla, de tal manera que quien gane una partida acumula un punto y el juego es ganado por quien obtenga primero cuatro puntos, ¿cómo deben de repartirse*

*las apuestas en caso de que el juego se interrumpa cuando el jugador A ha ganado dos puntos y B un punto?*

PROBLEMA 2. *¿Cuántas veces se necesita lanzar un par de dados para que sea más favorable obtener por lo menos un par de seises que no obtenerlo?*

PROBLEMA 3. *Dos jugadores, P y Q, juegan a lanzar alternadamente un par de dados. El juego comienza lanzando P el par de dados, con la condición de que si obtiene una suma igual a 6 gana el juego; en caso contrario el juego continúa lanzando Q el par de dados, con la condición de que si obtiene una suma igual a 7 gana el juego; en caso contrario el juego continúa lanzando P el par de dados bajo las condiciones iniciales. ¿Cuáles son las respectivas probabilidades que cada jugador tiene de ganar el juego?*

PROBLEMA 4. *Dos jugadores, A y B, los cuales poseen 12 fichas cada uno, juegan a lanzar sucesivamente tres dados, estableciéndose que A dará una ficha a B cada vez que se obtenga una suma igual a 11, mientras que B dará una ficha a A cada vez que se obtenga una suma igual a 14. Si el ganador del juego es el primero que llegue a poseer las 24 fichas, ¿cuáles son las respectivas probabilidades que cada jugador tiene de ganar el juego?*

Los problemas 1 y 2 fueron planteados a Pascal en el año 1654 por Antoine Gombaud de Mééré, conocido como el chevalier de Mééré, quien era aficionado a los juegos de azar y había logrado resolver el problema 2 pero no el 1. Pascal y Fermat encontraron las soluciones correctas a los dos problemas, mismas que se dieron a conocer entre ellos en una serie de cartas las cuales constituyen los únicos documentos en los cuales quedaron plasmados los métodos que utilizaron. Más tarde, Huygens, sin conocer los métodos utilizados por Pascal y Fermat, encontró también las soluciones correctas a ambos problemas y en el año 1657 publicó sus soluciones en su libro *De Ratiociniis in Ludo Aleae* ([14]), siendo ésta la publicación que se convirtió en la base para el desarrollo posterior del cálculo de probabilidades.

Sin embargo, no fueron Pascal, Fermat y Huygens los primeros en resolver de manera correcta problemas de probabilidad. La historia del cálculo de probabilidades se remonta por lo menos al siglo X cuando se plantearon algunos problemas que más tarde fueron la base para resolver problemas de probabilidad. En particular, en esa época se planteó el problema de determinar cuántos resultados distintos pueden obtenerse al lanzar  $n$  dados. La

primera solución correcta conocida de este problema se encuentra en un poema titulado “De Vetula” y escrito por Richard de Fournival (1200-1250). Ahí se afirma que 3 dados pueden caer en un total de 216 caminos.

La primera referencia conocida a una relación entre las diferentes posibilidades de ocurrencia de un evento y la frecuencia con que éste se observa, se encuentra en los comentarios a una publicación de *La Divina Comedia*, que en el año 1477 hizo Benvenuto d’Imola. Dice ahí:

Concerniente a estos lanzamientos (de dados) debe observarse que los dados son cuadrados y cualquier cara puede caer, así que un número que pueda aparecer en más caminos debe ocurrir más frecuentemente, como en el siguiente ejemplo: con tres dados, tres es el más pequeño número que puede obtenerse y sólo se obtiene con tres ases; cuatro puede obtenerse sólo en un camino, con un dos y dos ases.

En el libro titulado *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioniti et Proportionalità*, escrito por Luca Paccioli en 1487 y publicado en 1494, se encuentra formulado un problema similar al 1: Dos personas juegan de manera que se requiere un total de 60 puntos para ganar, siendo el premio de 22 ducados. Por alguna circunstancia, cuando uno tiene acumulados 50 puntos y el otro 30, no pueden continuar el juego. ¿Qué parte del premio le corresponde a cada uno? Paccioli consideraba, erróneamente, que la parte que corresponde a cada uno debe ser proporcional a los puntos que lleva ganados; en este caso, la repartición debería hacerse en la proporción de 5 : 3, es decir, al que lleva 50 puntos le corresponderían  $\frac{5}{8}$  y al otro  $\frac{3}{8}$ .

El primer estudio sistemático de problemas de probabilidad se debe a Girolamo Cardano, quien en el año 1526 escribió un libro titulado *Liber de Ludo Aleae*, cuya primera publicación apareció en el año 1663 ([6]). En ese trabajo, Cardano realizó un estudio de problemas relacionados con lanzamientos de dados.

En su libro, estableció Cardano el número de posibilidades en el lanzamiento de 2 y 3 dados, obteniendo 36 y 216, respectivamente. Aunque en un lenguaje distinto al que se usó más tarde en el cálculo de probabilidades, Cardano planteó y resolvió, a la manera clásica, problemas de probabilidad. Un ejemplo es el siguiente:

Considerando el lanzamiento de 2 dados, estableció que por lo menos un as se obtiene de 11 maneras; lo mismo puede decirse de por lo menos un dos, y así sucesivamente. Agregaba que, sin embargo, un as o un dos no se obtiene

de 22 maneras, pues hay 11 maneras en que se obtiene por lo menos un as y 9 más en que se obtiene por lo menos un dos, así que en total son 20 maneras de obtener por lo menos un as o por lo menos un dos. Continuaba diciendo que si se agrega ahora el 3, habrá 7 maneras más y así sucesivamente; en el siguiente paso habrá que sumar 5 maneras más, luego 3 y por último 1.

Decía entonces que si alguien dijera, quiero un as, un dos o un tres, se sabe que hay 27 caminos favorables y como el circuito es de 36, los caminos en que no se obtiene ninguno de estos números son 9; las posibilidades son entonces de 3 a 1.

Con este razonamiento Cardano llegó de hecho a la llamada definición clásica de probabilidad estableciendo las posibilidades de obtener un determinado resultado en función del número de posibles maneras en que ese resultado puede obtenerse.

Situándonos nuevamente en la época de Pascal y Fermat, el problema 1 fue el problema que más interés provocó debido a que pocos lograron encontrar la solución correcta. La solución de Fermat a este problema es la siguiente:

Al jugador P le faltan dos partidas para ganar y al jugador Q tres partidas, entonces, a lo más en 4 partidas adicionales se acaba el juego. Denotando por la letra  $a$  el que P gane una partida y por la letra  $b$  el que gane Q, los posibles resultados de 4 partidas son los siguientes:

$$(a, a, a, a), (a, a, a, b), (a, a, b, a), (a, b, a, a), (b, a, a, a), (a, a, b, b), (a, b, a, b),$$

$$(a, b, b, a),$$

$$(b, a, a, b), (b, a, b, a), (b, b, a, a), (a, b, b, b), (b, a, b, b), (b, b, a, b), (b, b, b, a),$$

$$(b, b, b, b)$$

en donde, por ejemplo,  $(b, b, a, b)$  significa que P gana sólo la tercera partida y Q las otras 3.

De estos 16 posibles resultados, hay 11 que hacen ganar al jugador P, a saber,  $(a, a, a, a)$ ,  $(a, a, a, b)$ ,  $(a, a, b, a)$ ,  $(a, b, a, a)$ ,  $(b, a, a, a)$ ,  $(a, a, b, b)$ ,  $(a, b, a, b)$ ,  $(a, b, b, a)$ ,  $(b, a, a, b)$ ,  $(b, a, b, a)$ ,  $(b, b, a, a)$ . Los 5 restantes hacen ganar al jugador Q. Por lo tanto, las apuestas se deben repartir en la proporción 11 : 5.

Los métodos seguidos por Pascal y Huygens para resolver este problema son distintos al de Fermat pero similares entre ellos. Su solución es como sigue:

Supongamos que al jugador A le falta una partida para ganar y a B dos, entonces, al jugar la siguiente partida hay dos posibilidades, la primera es que P la gane, en cuyo caso gana el juego y por lo tanto toda la apuesta, la segunda es que Q la gane, en cuyo caso P y Q quedan en igualdad de condiciones y debe entonces tocar a cada uno la mitad de las apuestas, es decir 32. Entonces en un caso a P le tocan 64 y en otro 32, así que, cualquiera que sea el caso, P tiene asegurado 32 y los otros 32 de las apuestas pueden corresponder a P o a Q con un azar igual; por lo tanto, de esos 32, la mitad debe ser para P y la otra para Q. Es decir, cuando a P le falta un punto y a Q dos, a P le corresponde  $32 + 16 = 48$  y a Q 16.

Supongamos ahora que a A le falta un punto y a B tres. En esta situación, si se juega la siguiente partida, P puede ganar toda apuesta o bien 48 por el primer caso. Por lo tanto a P le corresponde  $48 + \frac{1}{2}(16) = 56$  y a Q 8.

Finalmente, supongamos que a P le faltan dos puntos y a Q tres. En esa situación, si se juega la siguiente partida, P puede quedar faltándole un punto y tres a Q, en cuyo caso le corresponde 56 por el segundo caso; o bien, si Q gana esa partida, quedan en igualdad de circunstancias y toca a cada uno 32. Entonces P tiene asegurados 32 y puede ganar  $56 - 32 = 24$  con un azar igual que Q; así que entonces a P le corresponde  $32 + \frac{1}{2}(24) = 44$  y a Q  $8 + \frac{1}{2}(24) = 20$ , es decir, la repartición de las apuestas debe ser de 11 : 5.

Aunque los resultados de Pascal, Fermat y Huygens permitieron el establecimiento de reglas generales para resolver problemas de probabilidad y en ese sentido pueden considerarse como el origen del cálculo de probabilidades, la teoría de la probabilidad comenzó a ganarse un lugar importante dentro de la matemática a partir del libro de Jacques Bernoulli, *Ars Conjectandi*, publicado en el año 1713, ocho años después de su muerte ([1]).

Además de resolver con sus propios métodos los problemas ya resueltos por Pascal, Fermat y Huygens, Bernoulli se planteó un problema de singular importancia, el cual sería la base para todo el desarrollo posterior de la teoría. Escribió Bernoulli en su libro:

parece que, para hacer una hipótesis correcta sobre un hecho cualquiera, sólo es necesario calcular exactamente el número de casos posibles y, entonces, determinar las veces que puede posiblemente ocurrir un caso más que otro. Pero aquí, inmediatamente, surge nuestra mayor dificultad, porque este procedimiento se puede aplicar únicamente a muy pocos fenómenos; de hecho, casi exclusivamente a los relacionados con los juegos de azar... pero hay otro camino que nos conduce a lo que buscamos, y nos permite, por lo menos, hallar a posteriori lo

que no podemos determinar a priori, o sea, averiguando a partir de los resultados observados en numerosos casos similares. Ha de suponerse, a este respecto, que, bajo condiciones similares, la ocurrencia (o no ocurrencia) de un suceso en el futuro seguirá la misma pauta que se ha observado para sucesos iguales en el pasado. . . Lo que aún tiene que ser averiguado es si, cuando se aumenta el número de observaciones, también se sigue aumentando la probabilidad de que la proporción registrada de casos favorables y desfavorables se aproxime a la verdadera relación. . . Este es el problema que he decidido publicar aquí, después de haber trabajado sobre él durante veinte años.

El resultado al que hace referencia Bernoulli en su libro es el ahora llamado teorema de Bernoulli (véase la sección VII.1).

Más tarde, en el año 1733 ([10]), siguiendo a Bernoulli, Abraham de Moivre demostraría el ahora llamado teorema de de Moivre-Laplace (véase la sección VIII.3). Ambos resultados constituyeron los primeros teoremas límite de la teoría de la probabilidad, cuyo estudio se prolongó durante un periodo de más de 200 años, sentando así las bases de la teoría de la probabilidad moderna.

Los teoremas límite fueron formulados y demostrados de manera general a principios del siglo XX, interviniendo en ese proceso, entre otros, Pierre Simon Laplace ([20], [21]), Siméon Denis Poisson ([29]), Pafnuty Lvovich Chebyshev ([7], [8], [9]), Andrei Andreyevich Markov ([27]), Aleksandr Mikhailovich Lyapunov ([25], [26]), Félix Édouard Justin Émile Borel ([2]), Francesco Paolo Cantelli ([3], [4], [5]), J. W. Lindeberg ([24]), Paul Pierre Lévy ([22], [23]), Aleksandr Yakovlevich Khintchine ([15], [16]), Andrey Nikolaevich Kolmogorov ([17], [18]) y William Feller ([11]).

A principios del siglo XX la teoría de la probabilidad gozaba ya de una gran popularidad; sin embargo, sus fundamentos matemáticos no eran satisfactorios. De hecho, la probabilidad no era considerada como parte de la matemática. Sus conceptos y métodos eran específicos para las aplicaciones y no formaban parte de una estructura abstracta general. La misma definición de probabilidad, la cual estaba basada en el concepto de equiprobabilidad, resultaba insatisfactoria pues no en todos los fenómenos aleatorios resulta evidente qué resultados pueden considerarse como equiprobables.

Una buena referencia para conocer el estado de la teoría de la probabilidad a principios del siglo XX es el libro de Jules Henri Poincaré ([28]), cuya primera frase es elocuente: “No se puede dar una definición satisfactoria de la probabilidad”. Comenta más adelante que

la definición completa de la probabilidad es una especie de petición de principio: ¿cómo reconocer que todos los casos son igualmente probables? Aquí, una definición matemática no es posible; deberemos, en cada aplicación, hacer convenciones, decir que consideramos tal y tal caso como igualmente probables. Esas convenciones no son completamente arbitrarias, pero escapan al espíritu del matemático, que no tendrá más que examinarlas una vez que son admitidas. Así, todo problema de probabilidad ofrece dos periodos de estudio: el primero, metafísico, por así decirlo, el cual legitima tal o cual convención; el segundo, matemático, que aplica a esas convenciones las reglas del cálculo.

El estudio de la fundamentación matemática de la teoría de la probabilidad se realizó en los primeros 30 años del siglo XX, hasta que, en el año 1933, A. N. Kolmogorov publicó un artículo ([19]) en el cual estableció la formulación de la teoría de la probabilidad que prevalece hasta nuestros días.

El modelo que formuló Kolmogorov es axiomático, lo cual se explica por el hecho de que, a principios del siglo XX, el método axiomático había ganado un gran prestigio, luego de las aportaciones de Nikolai Ivanovich Lobachevskii, Hermann Minkowski y otros matemáticos, las cuales mostraban que es posible definir geometrías no euclidianas mediante diferentes sistemas axiomáticos. Aportaciones como éstas, así como la búsqueda del rigor en la ciencia, habían llevado a plantear la necesidad de la axiomatización para todas las ramas de la matemática, así como para aquellas ramas de la física en donde las matemáticas desempeñan un papel preponderante ([13]).

La historia de la teoría de la probabilidad no termina con su fundamentación matemática; ésta, que fue la conclusión de un proceso, se convirtió a su vez en punto de partida para profundizar en temas estudiados con anterioridad y para el estudio de nuevos sujetos de interés. Una vez formulado el modelo de Kolmogorov, la teoría de la probabilidad contó con una nueva herramienta que la haría desarrollarse mucho más: la *teoría de la medida*. En particular, la *teoría de los procesos estocásticos* se convirtió en el centro de interés de los estudiosos de la probabilidad, tema que hasta la fecha continúa desarrollándose.

#### BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bernoulli, J., *L'Art de Conjecturer*, L.G.F. Vastel, G. Le Roy, Caen, 1801. Traducción de *Ars Conjectandi*, Basileæ, 1713.

- [2] Borel, F. E. J. E., *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 27, p. 247-270, 1909. Reimpreso en *Oeuvres de Émile Borel*, Tome II, Centre National de la Recherche Scientifique, p. 1055-1079, 1972.
- [3] Cantelli, F. P., “Sulla legge dei grandi numeri”, *Mem. Acad. Lincei*, vol. **11**, Série 5, p. 329-349, 1916.
- [4] Cantelli, F. P., “Sulla probabilità comme limite della frequenza”, *Rend. Acad. Lincei*, vol. **26**, p. 39-45, 1917.
- [5] Cantelli, F. P., “Su due applicazioni di un teorema di G. Boole alla Statistica Matematica”, *Accademia dei Lincei Roma, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti*, **26** (5), p. 295-302, 1917.
- [6] Cardano, G., *Liber de Ludo Aleae*, 1564. Publicado en *Opera Imnia*, vol. 1, 1663. Traducción al inglés en *The book on games on chance*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1961.
- [7] Chebyshev, P. L., “Des valeurs moyennes”, *Matematicheskii Sbornik*, **127**, p. 1-9, 1867, también publicado en *Liouville’s Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **88**, p.177-184, 1867.
- [8] Chebyshev, P. L., *Démonstration élémentaire d’une proposition générale de la théorie des probabilités*.
- [9] Chebyshev, P. L., *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités*.
- [10] de Moivre, A., “A method of approximating the sum of the terms of the binomial  $(a+b)^n$  expanded into a series, from whence are deduced some practical rules, to estimate the degree of assent which is to be given to experiments”, *The doctrine of chances*, Third edition, p. 243-259, A. Millar, Londres, 1756. Reimpreso por Chelsea, Nueva York, 1967. Traducción (con algunas adiciones) de *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem Expansi*, 1733.
- [11] Feller, W., “Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, *Math. Zeitsch*, **40**, p. 521-559, 1935.
- [12] Fermat, P. & Pascal, B., “Correspondance – 1654”, *Oeuvres de Pascal*, t. III, p. 369-430.

- [13] D. Hilbert, “Sur les problèmes futures des Mathématiques”, *Comptes Rendus du Deuxième Congrès International des Mathématiciens*, Paris, p. 58-114, 1900.
- [14] Huygens, C., *Du calcul dans les jeux de hasard*, Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens, Vol. XIV, Martinus Nijhoff, 1920. Traducción de *De Ratiociniis in Aleae Ludo*, 1657.
- [15] Khintchine, A. Ya., “Sur la loi des grands nombres”, *Comp. Rend. Acad. Sci.*, **188**, p. 477-479, 1929.
- [16] Khintchine, A. Ya., “Sur la loi forte des grands nombres”, *C. R. Ac. Sc.* Paris, vol. **186**, p. 285-287, 1928.
- [17] Kolmogorov, A. N., “Sur la loi des grands nombres”, *Rend. Acad. Lincei*, vol. **9**, p. 470-474, 1929.
- [18] Kolmogorov, A. N., “Sur la loi forte des grands nombres”, *C. R. Ac. Sc.* Paris, vol. **191**, p. 910-912, 1930.
- [19] Kolmogorov, A. N., *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea, 1950. Traducción de “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, *Erg Mat.* **2**, No. 3, 1933.
- [20] Laplace, P. S., *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), Livre I. *Calcul des fonctions génératrices*, troisième édition, Courcier, Paris, 1820. *Oeuvres complètes* de Laplace, tome septième, Gauthier-Villars, 1886.
- [21] Laplace, P. S., *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), Livre II. *Théorie générale des probabilités*, troisième édition, Courcier, Paris, 1820. *Oeuvres complètes* de Laplace, tome septième, Gauthier-Villars, 1886.
- [22] Lévy, P. P., *Calcul des Probabilités*, Gauthier Villars, Paris, 1925.
- [23] Lévy, P. P., *Théorie de l'addition des variables aleatoires*, Gauthier Villars, Paris, 1937 (deuxième édition – 1954).
- [24] Lindeberg, J. W., “Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, *Math. Zeitsch.*, t. **15**, p. 211-225, 1922.
- [25] Lyapunov, A. M., “Sur une proposition de la Théorie des Probabilités”, *Izv. Akad. Nauk.*, Ser. 5, **13**, p. 359-386, 1900.

- [26] Lyapunov, A. M., “Nouvelle forme du théorème sur la limite des probabilités”, *Notes Acad. Sci. Phys. Math. Sect.*, Ser. 8, **2**, p. 1-24, 1901.
- [27] Markov, A. A., *Ischislenie Veroyatnostei* [El cálculo de probabilidades], Moscú, 1913 (cuarta edición, 1924).
- [28] Poincaré, J. H., *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, París, 1896.
- [29] Poisson, S. D., *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, Bachelier, París, 1837.

PRIMERA PARTE  
El cálculo de probabilidades



## I. EL MODELO MATEMÁTICO

En medio de las causas variables y desconocidas que designamos con el nombre de azar y que hacen incierta e irregular la marcha de los acontecimientos, se ve surgir, a medida que ellos se multiplican, una regularidad asombrosa, que parece obedecer a un designio y que se ha considerado como una prueba de la providencia. Pero reflexionando sobre ella, se reconoce pronto que esta regularidad no es más que el desarrollo de las respectivas posibilidades de los acontecimientos simples, los cuales deben presentarse más frecuentemente cuando más probables son.

PIERRE SIMON LAPLACE

### I.1 EXPERIMENTOS ALEATORIOS

EL ESTUDIO DE LA NATURALEZA se realiza mediante la experimentación, es decir, la observación de sistemas que son brindados por la misma naturaleza o diseñados especialmente para el estudio de determinadas propiedades del sujeto de interés. Por ejemplo, en física, se estudian las leyes del movimiento de los cuerpos basándose ya sea en la observación del movimiento de cuerpos que ofrece la misma naturaleza, como pueden ser los planetas de nuestro Sistema Solar, o bien diseñando experimentos en el laboratorio, por ejemplo, utilizando planos inclinados para estudiar el movimiento de cuerpos sobre ellos.

En general, el estudio de un determinado sistema conduce a un modelo de éste mediante el cual el estudio puede ser profundizado. El modelo, en general, es solo una aproximación del sistema real y está sujeto siempre a comprobación. Así, por ejemplo, en física, el estudio del movimiento de los cuerpos condujo a la mecánica clásica, según la cual este movimiento obedece a las llamadas leyes de Newton. Éstas se aplicaron a todo sistema en donde intervienen movimientos mecánicos hasta que se descubrieron fenómenos a