Christof Nachtigall | Markus Wirtz

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik

Statistische Methoden für Psychologen Teil 2

6. Auflage

BELTZ JUVENTA

Christof Nachtigall, Markus Wirtz
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik

Christof Nachtigall, Markus Wirtz

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik

Statistische Methoden für Psychologen
Teil 2

6. Auflage

BELTZ JUVENTA

Die Autoren

Christof Nachtigall, Jg. 1962, Dr. phil., Dipl.-Psych., Dipl.-Math., hat in Münster Mathematik und Psychologie studiert. Er arbeitet im Bereich Methodenlehre und Evaluationsforschung an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Derzeit ist er als Projektleiter von kompetenztest.de im Bereich schulischer Vergleichsarbeiten und empirischer Bildungsforschung tätig.

Markus Wirtz, Jg. 1969, Dr. phil., Dipl.-Psych., hat in Münster Psychologie studiert und promoviert. Anschließend war er als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Tübingen und der Universität Freiburg tätig. Seit 2006 ist er Professor für Pädagogische Psychologie an der Pädagogischen Hochschule Freiburg und leitet dort die Abteilung für Forschungsmethoden.

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

1. Auflage 1998
2., überarbeitete und erweiterte Auflage 2002
3. Auflage 2004
4., überarbeitete Auflage 2006
5. Auflage 2009
6. Auflage 2013

www.beltz.de · www.juventa.de

Druck nach Typoskript

ISBN 978-3-7799-5079-0

Inhalt

Vorwort zur 1. Auflage

Für Studierende, die mit dem Psychologiestudium beginnen, kommt es im ersten Semester oft zu einer Überraschung. Statt der erwarteten Erkenntnisse über Menschen wird ihnen etwas über Wahrscheinlichkeit und Kennwerte, Stichproben und statistische Tests erzählt. So Manchem, dem die Mathematik in der Schule nicht gerade das Liebste war oder dessen Schulzeit lange zurückliegt, fällt es zunächst schwer, sich mit diesen Begriffen zurechtzufinden. Die folgende Abbildung[1] mag die Situation vieler Erstsemester wiedergeben.

Zahlen, Formeln, und wo bleibt die eigentliche Psychologie? Ziel dieses Buches ist zweierlei: Erstens soll deutlich werden, *warum* diese technischen Begriffe auf dem Weg zu inhaltlichen psychologischen Theorien wichtig sind. Zweitens soll die Arbeit mit diesem Buch helfen, diese Begriffe zu *verstehen* und das praktische Umgehen damit zu erlernen. Dazu werden sehr viele Beispiele aufgeführt. Sie beziehen sich zumeist auf Daten, die von Studierenden der Psychologie stammen und in Vorlesungen des Grundstudiums erhoben wurden. Dabei werden inhaltliche Fragen in statistische Begriffe übersetzt, mit statistischen Methoden behandelt und die Resultate inhaltlich interpretiert. Dieses Vorgehen soll die Verknüpfung von inhaltlicher Fragestellung und statistischer Analyse verdeutlichen und einüben helfen.

Wie kann mit diesem Buch gearbeitet werden? Zunächst einmal ist nicht alles gleich wichtig. Zu Beginn der *Kapitel I – Wahrscheinlichkeitsrechnung* und *II – Inferenzstatistik* finden sich Übersichten und Hinweise darauf, was unverzichtbares Basiswissen ist und was eher als Ergänzung und Vertiefung anzusehen ist. Zu *Kapitel II* ist zu sagen, dass die Abschnitte *B.1* und *B.2* solch unverzichtbares Basiswissen darstellen. Abschnitt *A* und *B.4* zeigen auf, *warum* und *wie* schließende Statistik überhaupt funktioniert, sie bilden die Grundlage für das Verstehen von Inferenzstatistik. Abschnitt *C* enthält eine Vielzahl von statistischen Tests. Hier geht es nicht darum, alle technischen Einzelheiten aus-

---

[1] aus Bamdad's Math Comics, www.csun.edu/~hcmth014/comicfiles/allcomics. html.

wendig zu lernen, sondern das gemeinsame Prinzip zu verstehen und bei Bedarf selbständig statistische Verfahren auswählen und anwenden zu können. Abschnitt *D* schließlich beschäftigt sich wieder grundsätzlicher mit Statistik und soll zu einer kritischen Beurteilung der Möglichkeiten und Grenzen dessen, was bis dahin an Handwerkzeug vermittelt wurde, anregen.

In dem vorliegenden Band 2: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik* der Reihe *„Statistische Methoden für Psychologen"* finden sich viele Parallelen zu Band 1: *Deskriptive Statistik.* Dies ist keineswegs ein Zufall. Während man sich in der deskriptiven Statistik mit der Beschreibung und Darstellung *von Daten aus Stichproben* beschäftigt, versucht man in der Inferenzstatistik, über die dahinter liegende *Population* Aussagen zu machen. Interessiert man sich in der deskriptiven Statistik z. B. für Mittelwerte und Streuung eines Merkmals, so fragt die Inferenzstatistik nach den entsprechenden Mittelwerten und Streuungen in der Population, und ermöglicht Entscheidungen darüber, ob z. B. zwei Mittelwerte in der Population gleich oder verschieden sind. Beschreibt die deskriptive Statistik den Zusammenhang zweier gemessener Merkmale z. B. durch einen Korrelationskoeffizienten, so fragt die Inferenzstatistik nach der Korrelation dieser Merkmale in der Population. Die Abbildungen auf den nächsten Seiten zeigen die Inhalte beider Bände „Statistische Methoden für Psychologen" und die Gliederung der beiden Kapitel dieses Bandes.

Danksagung:

Viele haben mitgeholfen, um das Manuskript in eine präsentable Form zu bringen. Dank gebührt den Korrekturlesern, Graphikexperten und „Simulanten", Anja Lemm, Johannes Kuhn, Katrin Schmelz, Ute Suhl, Nico Pannier und Bertram Wagner, von denen viele Verbesserungsvorschläge kamen.

Ebenfalls Dank gebührt den Psychologiestudierenden aus Jena und Münster, die uns mit ihren Kritiken und Anregungen sehr unterstützten, und die bereitwillig viele Fragebögen ausfüllten, so dass immer genug „Datenmaterial" zur Illustration vorhanden war. Ohne die Rückmeldungen wären viele Fehler im Manuskript unentdeckt geblieben, und die Nachfragen von Studierenden haben uns immer wieder gezeigt, welche Punkte schwer verständlich sind, so dass wir gezielt auf diese Inhalte genauer eingehen konnten.

Jena und Münster, den 25.4.1998,

Christof Nachtigall & Markus Wirtz

Vorwort zur 2. Auflage

Das Ziel ist geblieben: Die beiden Bände *Statische Methoden für Psychologen* sollen für Studierende eine Hilfe sein, zu verstehen, wofür Statistik gebraucht wird und wie Statistik funktioniert. Dazu haben wir diese 2. Auflage gründlich überarbeitet und einiges verändert. Zunächst wurden die Druckfehler korrigiert, auf die uns Leser dankenswerter Weise aufmerksam machten. Darüber hinaus wurde der Teil 'Wahrscheinlichkeitsrechnung' deutlich umstrukturiert und gestrafft, die anderen Kapitel nach didaktischen Gesichtspunkten klarer gegliedert, entschlackt und um weiterführende Literatur ergänzt. Beibehalten wurde die Konzeption, statistische Verfahren anhand von Beispielen einzuführen. Diese Beispiele verwenden in der Regel Daten, die per Fragebogen mit den Teilnehmern der Methodenvorlesung erhoben wurden (im Buch heißt das dann 'Vorlesungsbefragung'). Die meisten Daten sind also echt und stammen von Ihren Kommilitonen.

Gemäß dem Grundsatz, dass Statistik ein Handwerkzeug ist und Handwerk geübt werden muss, wurden bei der Überarbeitung dieses Buches die Möglichkeiten für praktisches Üben weiter ausgebaut. So ist es wichtig und sinnvoll, zum Verstehen statistischer Verfahren diese zunächst anhand von kleinen Datensätzen 'mit der Hand' zu rechnen. In diesem Sinn sind auch die Übungsaufgaben am Ende jedes Kapitels gedacht. Auf Wunsch vieler Leser werden jetzt Lösungen zu den Übungsaufgaben angeboten. Sie finden sie auf der Netzseite www.statistik-fuer-psychologen.de. Auf diese Weise können Sie Ihre eigenen Lösungen überprüfen. Wir warnen aber vor einer Falle, in die manche Teilnehmer von Übungsgruppen in Statistik getappt sind: Wenn man statt eigene Lösungsversuche zu machen nur Musterlösungen anguckt und gewissermaßen 'abnickt', entwickelt sich eine trügerische Illusion von Verständnis des Stoffes. Diese zerplatzt dann, wenn man (z.B. in einer Klausur) ohne Musterlösungen statistische Probleme lösen muss. Daher empfehlen wir dringend, zunächst eigene Lösungsversuche zu unternehmen. Nur selber Lösen macht schlau. Sehr hilfreich ist es hingegen, die eigenen Überlegungen mit Kommilitonen anschließend zu diskutieren. Austausch und Teamarbeit sind nicht nur für die 'statistische Psychohygiene' wichtig, sondern auch im Hinblick auf mündliche Prüfungen. Auch hier gilt das geflügelte Psychologenwort: Gut, dass wir drüber gesprochen haben.

Spätestens bei eigenen Datenanalysen im Rahmen von Hausarbeiten, Praktika oder Diplomarbeiten reicht das Rechnen 'von Hand' nicht mehr aus und der Einsatz von statistischen Programmen wird unverzichtbar. In der Psychologie hat sich das Programmpaket SPSS-Statistical Package for the Social Sciences zwar nicht unbedingt als die Beste, aber als die am weitesten verbreitete Software etabliert. Dem wird in diesem Buch dadurch Rechnung getragen, dass am Ende der einzelnen Kapitel Hinweise zur Durchführung der besprochenen Verfahren mit SPSS gegeben werden (siehe unten stehende 'Feature'-Liste). Wir raten den Lesern, sich möglichst früh mit der Bedienung eines solchen Programms vertraut zu machen. Auf der Netzseite finden sich zusätzliche Informationen zu statistischer Software und Einführungsliteratur. Die Programme sind meist so einfach zu bedienen, dass die Unterstützung durch ein Handbuch oder, noch besser, einen erfahrenen Kommilitonen, ausreicht. Gleichwohl ist es mit der Bedienung allein keineswegs getan, sondern die Ergebnisse des Programms müssen auch verstanden, der Output interpretiert werden. Um es ganz klar zu sagen: Kenntnisse in statistischen Programmen sind wichtig, aber entscheidend ist das Wissen darüber, was da eigentlich gerechnet wird und was das für die inhaltlichen Fragen bedeutet. 'Klicken' in SPSS allein reicht keineswegs aus. Vielmehr ist es eine der wichtigsten Kompetenzen von Diplompsychologen, aufgrund ihrer Kenntnisse über 'wissenschaftliches Handwerkszeug' zu beurteilen, welche psychologischen Theorien aufgrund empirischer Daten als ausreichend gestützt gelten dürfen und welche eher dem weiten Gebiet mehr oder weniger plausibler Spekulation zuzurechnen sind.

Die Netzseite statistik-fuer-psychologen

Als Ergänzung zu den beiden Büchern wurde eine Internetseite eingerichtet. Unter der Adresse www.statistik-fuer-psychologen.de finden Sie die Lösungen zu den Übungsaufgaben. Darüber hinaus enthält die Seite eine Fülle von weiteren Informationen und Ergänzungen zu den Büchern. So findet man dort ein Forum, in dem Sie Ihre Fragen und Anmerkungen zum Arbeiten mit den Büchern mit anderen Lesern austauschen können. Weiter enthält die Seite die im Buch besprochenen Beispiele, berechnet mit SPSS und versehen mit kommentiertem Output. Auch können die Beispiel-Datensätze für eigenes Üben herunter geladen werden. Zusätzlich finden sich dort Links zu anderen relevanten Seiten sowie ergänzende und vertiefende Texte, die sich mit spezielleren statistischen Problemen beschäftigen, welche über die erste Einführung hinausgehen.

Die "Features"

Die 2. Auflage ist noch stärker auf Übersichtlichkeit und das praktische Üben von Statistik ausgerichtet. Dazu wurden in den einzelnen Kapiteln Rubriken mit den folgenden Symbolen eingerichtet:

Dieses Symbol weist auf wichtige Formeln und Lehrsätze hin.

SPSS: Es wird angegeben, mit welchem "Klick" man mit dem Programmpaket SPSS die beschriebenen statistischen Verfahren ausführen kann. Den kommentierten Output dieser Analyse finden Sie auf der Netzseite www.statistik-fuer-psychologen.de.

Weiterführende Literatur: Am Ende der einzelnen Abschnitte finden sich Angaben zu weiterführender Literatur.

Aufgaben: Am Ende der einzelnen Kapitel befindet sich jeweils eine Reihe von Übungsaufgaben. Lösungen für diese Übungsaufgaben können unter www.statistik-fuer-psychologen.de herunter geladen werden.

Technische Hinweise: Mit diesem Symbol sind Abschnitte gekennzeichnet, die für das erste Verstehen nicht notwendig sind, sondern die technischen Aspekte bei der Durchführung eines Verfahrens näher erläutern.

Ausblick: Es werden Inhalte angesprochen, die in den nachfolgenden Kapiteln genauer behandelt werden

Vertiefungen: Diese Abschnitte können beim ersten Lesen übergangen werden. Sie dienen dazu, den Stoff sowohl tiefer zu verstehen als auch mit anderen Bereichen zu verknüpfen.

Wir wünschen allen Lesern eine verständnisvolle und ertragreiche Beschäftigung mit diesem methodischen Thema, in der Hoffnung, dass Sie die investierte Arbeit später als nützlich empfinden werden.

Jena, den 1.5.2002, Christof Nachtigall & Markus Wirtz

Vorwort zur 3. und 4. Auflage

In den neuesten Auflagen wurden einige Textpassagen hinsichtlich Verständlichkeit und Präzision verbessert sowie noch vorhandene Fehler korrigiert. Die 4. Auflage erhielt zudem einen ergänzenden Abschnitt über Äquivalenztests.

Wir möchten uns herzlich bei all denen bedanken, die in den letzten Jahren mitgeholfen haben, die beiden Bände „Statistische Methoden für Psychologen" zu dem zu machen, was sie nicht nur in unseren Augen heute sind: Gute Lehr- und Lernbücher.

Ein besonderer Dank gilt unserem Kollegen Hans Müller. Ihm verdanken wir viele hilfreiche Anregungen für dieses Buch. Er starb im Jahr 2005 an Krebs, und sein Tod gemahnt uns, die Aufmerksamkeit auf die wirklich wichtigen Dinge im Leben zu lenken.

Herzlichen Dank auch an Walter Schreiber für die wertvollen Hinweise zur Überarbeitung, an Ulrike Enders für die sorgfältigen Manuskriptergänzungen sowie an alle Studierenden, die über die gemeinsame Arbeit zum Gelingen dieses Buches beigetragen haben.

Jena, den 1.12.2005, Christof Nachtigall & Markus Wirtz

Band 1
Deskriptive Statistik

Beschreibung und Darstellung von Merkmalsverteilungen in Stichproben

- **Messtheorie (II.A)**
  Was bedeutet es, wenn Merkmalsausprägungen durch Zahlen beschrieben werden? Welche Informationen werden durch Zahlen abgebildet?
  - Beschreibung und Darstellung eines Merkmals (II.B)
  - Beschr. u. Darstellung des Zusammenhangs zweier Merkmale (II.C, D)
  - Beschr. u. Darstellung des Zusammenhangs mehrerer Merkmale (II.E, F)

Band 2
I. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Beschreibung und Analyse der Eigenschaften von Zufallsvariablen und deren Verteilung

- **Der Wahrscheinlichkeitsbegriff (I.A)**
  Was bedeutet es, wenn man ein Ereignis oder die Ausprägung eines Merkmals als zufällig bezeichnet? Was bedeutet es, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu bestimmen?
  - Beschreibung und Darstellung der Verteilung einer Zufallsvariablen (I.B,C)
  - Beschreibung und Darstellung des Zusammenhangs zwischen Ereignissen bzw. Zufallsvariablen (I.D)

Band 2
II. Inferenzstatistik

Entscheidungsverfahren, die es ermöglichen, von Stichprobendaten auf die Population zu schließen

- **Vertrauensintervalle und Signifikanzaussagen (II.A-D)**
  Wie stark unterscheiden sich Ergebnisse aufgrund von Zufallseinflüssen (Vertrauensintervalle)? Wie kann Zufall als Ursache eines Effekts ausgeschlossen werden (Signifikanz)?
  - Intervalle für die Kennziffern der Verteilung eines Merkmals (II.A,B) Unterscheiden sich Gruppen hinsichtlich der Verteilung eines Merkmals? (II.B,C)
  - Besteht ein verallgemeinerbarer Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen? (II.B.3 u. .C.1)

Inhaltsübersicht von Band 1 und 2 – Statistische Methoden für Psychologen

I. Wahrscheinlichkeitstheorie

Zufällige Ereignisse und die Wahrscheinlichkeit: Welche Aussagen können über Ereignisse gemacht werden, deren Eintreten zufallsabhängig ist? Was bedeutet es, wenn einem zufälligen Ereignis ein Wahrscheinlichkeitswert zugeordnet wird?

Eindimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Dichte- u. Verteilungsfunktion
Wie ist eine Zufallsvariable verteilt? Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden bestimmte Werte oder Werte in bestimmten Bereichen gemessen? (I.B, C)

Zusammenhänge zwischen zwei Zufallsvariablen (I.D)

Graf. Eigenschaften d. Dichte u. Verteilungsfunktion (I.B, C.3)

Verteilungsparameter (I.C.2.)
Durch welche Parameter lassen sich Eigenschaften der Verteilung einer Zufallsvariablen beschreiben?

Stochastische Abhängigkeit v. Ereignissen

Kennwerte für den Zusammenhang:

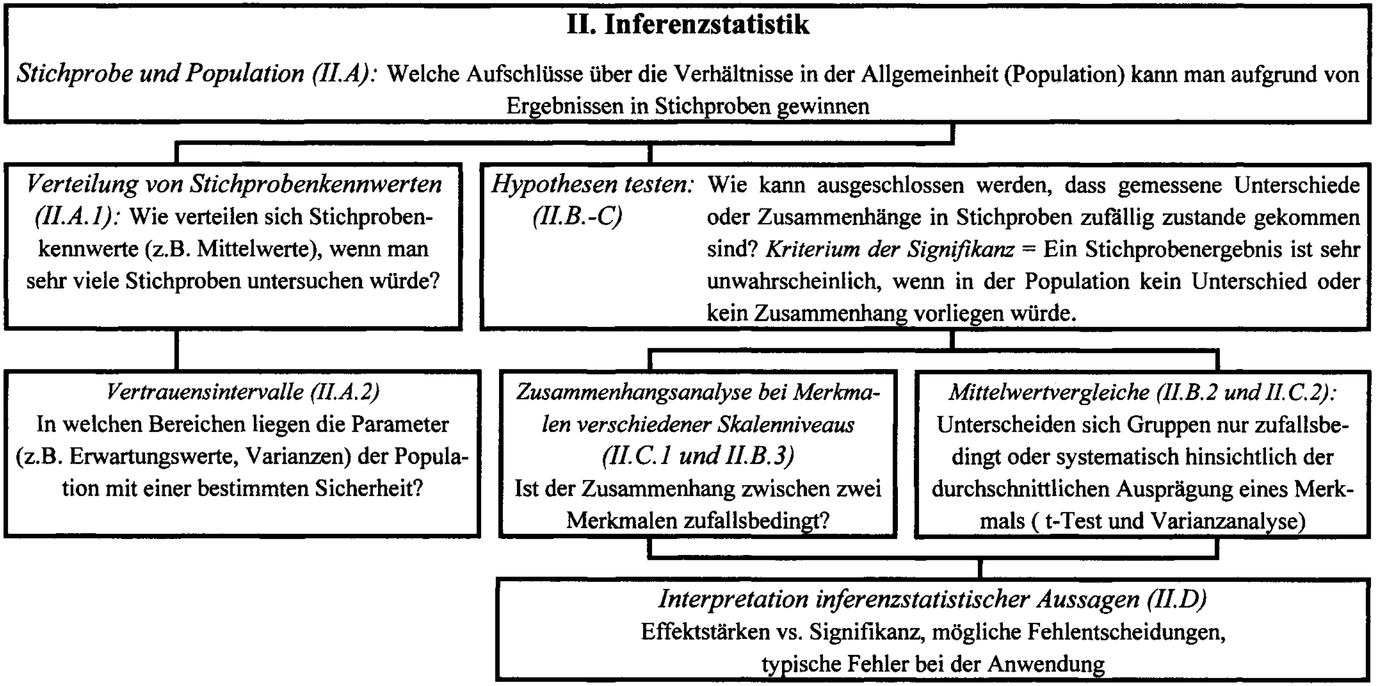
Kovarianz und Korrelation

Erwartungswert (I.C.2.2)
Welchen Wert nimmt eine Zufallsvariable im Durchschnitt an?

Kennwerte der Streuung (I.C.2.3)
Wie stark variieren die Werte einer Zufallsvariablen? Streuung u. Varianz

z-Standardisierung und Standardnormalverteilung (I.B.8): Wie können Werte aus Verteilungen ähnlicher Gestalt (z.B. Normalverteilungen), die unterschiedliche Erwartungswerte und Varianzen besitzen, miteinander verglichen werden?

Inhaltsübersicht über Kapitel 1: Wahrscheinlichkeitsrechnung



Inhaltsübersicht über Kapitel 2: Inferenzstatistik

Kapitel I: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wofür brauchen Psychologen Wahrscheinlichkeitsrechnung? Hat man sich als Studierender der Psychologie mit der Statistik als Teil des Lehrplans gerade abgefunden, so stellt sich beim Thema „Wahrscheinlichkeit" erneut die Frage nach dem Sinn. Besteht doch zunächst die Motivation vieler Studierender darin, mehr über Menschen, ihr Denken, Fühlen und Handeln lernen zu wollen. Man möchte salopp gesagt herausbekommen, wie Menschen funktionieren. Es gilt z.B. zu ermitteln, unter welchen Bedingungen Menschen zu Gewalt neigen, mit welcher Therapie eine bestimmte psychische Störung behandelt werden kann oder welche Strategien für ein erfolgreiches Studium günstig sind. In wissenschaftlicher Sprechweise geht es darum, Zusammenhänge zwischen interessierenden Merkmalen zu finden. Das Konzept „Wahrscheinlichkeit" ist hierbei auf zwei Ebenen von Bedeutung.

Zum einen handelt es sich bei Zusammenhängen in der Psychologie fast immer um stochastische Zusammenhänge (vgl. Band I, Abschnitt II.C). Damit ist gemeint, dass bei Kenntnis eines Merkmals X die Ausprägung eines anderen Merkmals Y nicht präzise vorhergesagt werden kann. Wird z.B. bei einer Person mit Panikstörung eine Konfrontationstherapie durchgeführt, so wird diese Therapie *wahrscheinlich* helfen. Man kann jedoch nicht sicher sein. Stehen mehrere Therapien zur Verfügung, so sollte ein Therapeut diejenige auswählen, welche mit *größerer Wahrscheinlichkeit* hilft. Alle Aussagen in der Psychologie sind gewissermaßen Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Ist diese Herangehensweise unserer alltäglichen Denkweise so fremd? Kalkulieren wir nicht auch, wenn wir ins Kino gehen, ob der Film sich wohl lohnt, hoffen wir nicht, bei einem Rendezvous bessere Chancen zu haben, wenn wir uns schick machen oder uns auf eine bestimmte Weise verhalten. Wir stellen ständig Kalkulation darüber an, welche Resultate unsere Handlungen wahrscheinlich erzielen werden.

Daher müssen wir uns mit dem Konzept „Wahrscheinlichkeit" vertraut machen. Unsere psychologischen Aussagen sollen wissenschaftlichen Kriterien genügen, somit ist es unumgänglich, *Wahrscheinlichkeiten* möglichst präzise und objektiv angeben zu können. Aus diesem Grund wird in den folgenden Abschnitten allerlei Aufwand getrieben, um präzise und objektiv festzulegen, was Wahrscheinlichkeit ist und wie die Wahrscheinlichkeiten von interessierenden Ereignissen bestimmt werden können.

Es gibt noch einen weiteren Grund, warum die Beschäftigung mit *Wahrscheinlichkeit* für Psychologen wichtig ist. Dabei geht es wieder mehr um das Thema Statistik. Warum Statistik für Psychologen wichtig ist, war ein zentrales Thema in Band I. Es wurden Verfahren beschrieben, die dazu dienen, die Informationen aus Stichprobendaten zusammenzufassen und daraus inhaltliche Schlüsse zu ziehen. Behandelt man z.B. eine Gruppe von 30 Patienten mit einer neuen Therapie, so kann man am Ende der Therapie den Anteil der geheilten Patienten bestimmen und auf dieser Basis Aussagen über den Therapieerfolg machen. Allerdings bezieht sich dieses Ergebnis zunächst nur auf die untersuchte Stichprobe. Nun ist es aber wünschenswert, allgemeine Aussagen über die Wirksamkeit einer Behandlungsmethode zu treffen. Es soll über die Stichprobe hinaus auf eine bestimmte Population, z.B. alle erwachsenen Deutschen, geschlossen werden. Schließlich möchte der Therapeut wissen, ob dieses neue Verfahren generell zu empfehlen ist. Diese Frage ist typisch für die *Inferenzstatistik* oder *schließende Statistik*, mit der sich dieser Band schwerpunktmäßig befasst. In der Inferenzstatistik geht es darum, aufgrund von Ergebnissen aus Stichproben auf die Population zu schließen. Hier taucht nun ein zentrales Problem auf: Selbst wenn z.B. in der Stichprobe 90% der Patienten geheilt wurden, so kann die Situation in der Population ganz anders aussehen. Vielleicht wurden zufällig nur Leute in die Studie aufgenommen, die auf die Therapie gut ansprechen. Möglicherweise gibt es außerhalb der untersuchten Stichprobe *niemanden*, dem die Therapie hilft. Dies ist zwar *sehr unwahrscheinlich*, aber möglich. In Stichproben können die Ergebnisse ganz anders aussehen als in der Population, je nachdem, welche Personen zur Stichprobe gehören. Hier eröffnet sich das zweite wichtige Anwendungsgebiet von Wahrscheinlichkeitsrechnung: Wir brauchen dieses Konzept, um den „Stichprobenfehler" (das ist die Abweichung von Ergebnissen aus Stichproben von dem, was in der Population tatsächlich vorliegt) in den Griff zu bekommen.

Aus diesem Grunde gliedert sich dieses Buch in 2 Kapitel: Zunächst wird in *Kapitel I - Wahrscheinlichkeitsrechnung* geklärt, was Wahrscheinlichkeit ist und wie man damit umgeht. *Kapitel II - Inferenzstatistik* beschäftigt sich anschließend mit dem Schließen von Stichproben auf die Population. Letztlich ist dies das zentrale Anliegen wissenschaftlicher Psychologie: möglichst allgemeine Aussagen über Regelhaftigkeiten in menschlichem Denken, Fühlen und Handeln zu machen.

Kapitel I ist folgendermaßen aufgeteilt: In Abschnitt *A* wird dargestellt, was wir unter zufälligen Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten verstehen. Dieser Abschnitt ist zentral für das Verständnis von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik. Die Abschnitte *B bis D* beschäftigen sich mit dem praktischen Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten. In *B* werden wir die wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennenlernen. Ab Abschnitt *C* wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung wieder mehr mit der Statistik zusammengeführt. Ging es in der deskriptiven Statistik um psychologisch relevante Variablen in Stichproben und deren Kennwerte, so werden nun Variablen behandelt, deren Werte noch nicht vorliegen sondern sich zufällig ergeben können: Wir sprechen von *Zufallsvariablen*. Abschnitt *C* stellt das Konzept der Zufallsvariablen und ihre Kennwerte vor. Im letzten Abschnitt *D* geht es ebenfalls in Analogie zur deskriptiven Statistik darum, wie man mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Zusammenhänge zwischen Zufallsvariablen beschreiben kann.

I.A Zufall und Wahrscheinlichkeit

I.A.1 Zufällige Ereignisse

Bevor wir klären, was unter Wahrscheinlichkeit verstanden wird, präzisieren wir zunächst, über *wessen* Wahrscheinlichkeit wir sprechen. Hier hat sich der Begriff der *zufälligen Ereignisse* eingebürgert. Ereignisse sind all die Dinge, für deren Eintreten man sich interessiert, z.B. die Heilung (oder Nichtheilung) von Patienten in einer Therapie, das Verschlafen (oder Nichtverschlafen) vor einer Methodenvorlesung, das Kennenlernen eines „Traummannes" (oder einer „Traumfrau") auf einer Party oder die berühmten 6-Richtigen im Lotto. Ein Ereignis wird als „zufällig" bezeichnet, wenn sein Eintreten unter den gegebenen Bedingungen nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann. Alle oben genannten Beispiele sind offensichtlich solche „zufälligen Ereignisse". Wir sind ständig von zufälligen Ereignissen umgeben. Der Erfolg einer Therapie bei einem Patienten z.B. ist immer ein zufälliges Ereignis. Dies bedeutet jedoch nicht, dass der Therapieerfolg genauso wenig vorhergesagt werden kann wie das Ergebnis eines Münzwurfs oder das Wetter des kommenden Sommers. Gute Therapien zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Erfolg mit großer Sicherheit eintrifft. Nur wirkt keine psychologische Therapie mit 100%iger Sicherheit. Therapieerfolg steht nicht *vollkommen* fest, deshalb sprechen wir von einem zufälligen Ereignis.

Um präzise mit zufälligen Ereignissen umgehen zu können, werden nun einige technische Begriffe eingeführt. Dabei bedienen wir uns der Mengenlehre. Mengenlehre ist gewissermaßen die Sprache, in der zufällige Ereignisse aufgeschrieben werden.

Die Menge all dessen, was überhaupt passieren kann, wird als *Ereignisraum* Ω (griechisch *omega*) bezeichnet. Ereignisse sind formal definiert als Teilmengen von Ω. Die folgenden Beispiele illustrieren diese Begriffe.

Beispiel: Beim Werfen einer Münze sind „Zahl" und „Wappen" mögliche Ereignisse. $\Omega = \{$*„Zahl", „Wappen"*$\}$.

Beim Werfen eines Würfels sind die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 mögliche Ereignisse. Auch das Werfen einer Augenzahl von mehr als vier Augen ist ein mögliches Ereignis. $\Omega = \{1,..,6\}$.

Beim Erfolg einer Therapie könnte man z.B. zwei interessierende Ereignisse unterscheiden: $\Omega = \{$*Erfolg, kein Erfolg*$\}$.

Durch Verknüpfung von Ereignissen ergeben sich neue Ereignisse. Betrachten wir die Ereignisse Z: ein Patient leidet an einer Zwangsstörung, und D: ein Patient leidet an einer depressiven Störung. Es können auch depressive Patienten mit Zwangsstörung, depressive Patienten ohne Zwangsstörung oder Patienten, die eine Zwangsstörung oder eine Depression haben, vorkommen. Ein solches Verknüpfen von Ereignissen zu neuen Ereignissen wird ebenfalls mit den Symbolen der Mengenlehre beschrieben.

Bleiben wir der Einfachheit halber beim Beispiel des Würfelwurfes: Sei A das zufällige Ereignis, beim Würfeln eine gerade Zahl zu erzielen, und B das zufällige Ereignis, eine Zahl größer als 4 zu erzielen. Der englische Mathematiker *John Venn* (1834-1923) entwickelte die folgende Art der grafischen Darstellung, mit der Mengen und ihre Beziehungen verdeutlicht werden können. Dabei repräsentieren Ellipsen die betrachteten Ereignisse. Bezeichnet werden Ereignisse traditionell mit großen Buchstaben A, B, C... . Der Ereignisraum Ω wird als viereckiger Rahmen dargestellt, in dem die anderen Ereignisse enthalten sind. Ω wird als das „sichere Ereignis“ bezeichnet.

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{2,4,6\}$

$B=\{5,6\}$

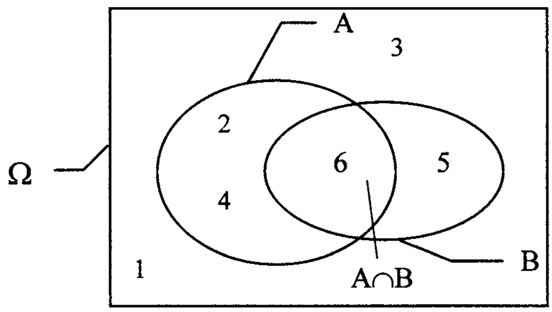


Abbildung 1. Ein sogenanntes Venn-Diagramm veranschaulicht die Mengenbegriffe.

Die Ereignisse A und B sind Teilmengen von Ω. Eine Menge ist genau dann Teilmenge einer anderen Menge, wenn alle ihre Elemente in der anderen Menge enthalten sind. Beispielsweise ist B keine Teilmenge von A, da die 5 nicht in A enthalten ist.

Die folgende Liste zeigt, wie durch Verknüpfung von Ereignissen neue Ereignisse entstehen.

$A \cap B$: Die Schnittmenge von A und B bezeichnet das Ereignis, dass sowohl A als auch B eintreten. Im Beispiel bedeutet dies sowohl eine gerade Zahl, als auch eine Zahl größer 4 zu werfen. Es ist $A \cap B = \{6\}$. Im Venn-Diagramm (vgl. Abb. 1) ist die Schnittmenge der Bereich, in dem sich A und B überschneiden. Es gilt: $A \cap B = B \cap A$.

$A \cup B$: Die Vereinigungsmenge von A und B bezeichnet das Ereignis, dass A oder B (oder beide) eintreten. Im Beispiel ist $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

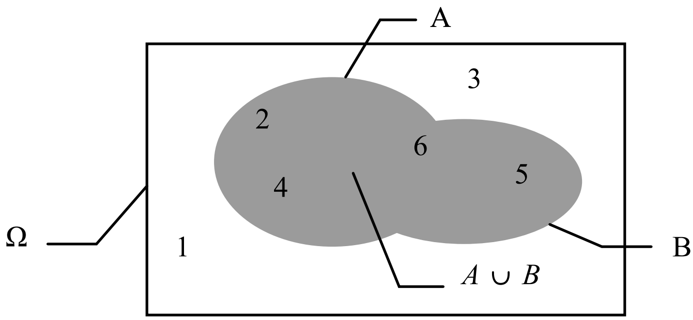


Abbildung 2: Darstellung der Vereinigungsmenge $A \cup B$.

-A (nicht A) bezeichnet das Ereignis, dass A *nicht* eintritt (andere Schreibweise: A^c oder $\overline{A}$). -A heißt das *Gegenereignis* zu A. Im Beispiel ist -A = {1,3,5}; -B = {1,2,3,4}.

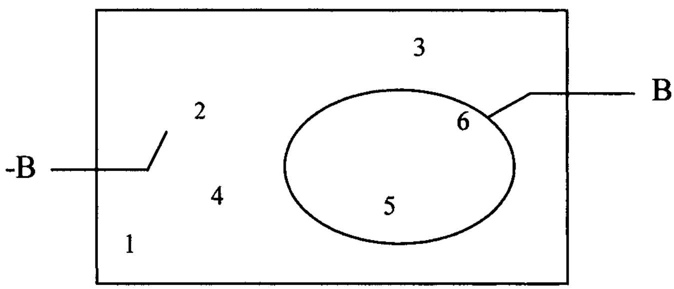


Abbildung 3: Darstellung der Ereignisse B und -B.

A\B (A ohne B) bezeichnet die Menge der Ereignisse, bei denen A, jedoch *nicht* B eintritt. Im Beispiel ist A\B = {2, 4}. Es gilt $A \setminus B = A \cap -B$.

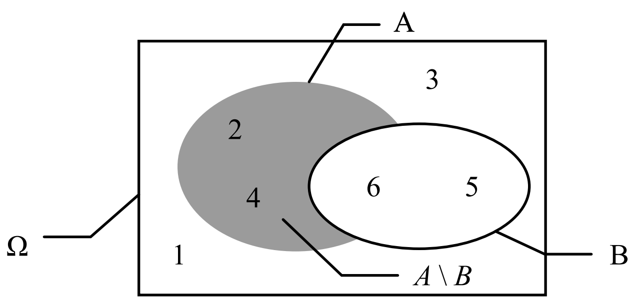


Abbildung 4: Darstellung von A\B.

Ein Ereignis $C=\{\omega\}$, (ω ist der kleine griechische Buchstabe Omega), das nicht als eine Kombination anderer Ereignisse beschrieben werden kann, wird als *Elementarereignis* bezeichnet. Das Ereignis eine 6 zu würfeln ($C = \{6\}$) ist ein Elementarereignis. Die Ereignisse A und B im Beispiel sind keine Elementarereignisse.

Die leere Menge $\varnothing = \{\}$ ist die Menge, die keine Elemente enthält. Sie ist ebenfalls eine Teilmenge von Ω und wird als das „unmögliche Ereignis" bezeichnet. Sie wird der Vollständigkeit halber eingeführt, damit jedes Ereignis auch ein Gegenereignis hat. Es ist $\varnothing=-\Omega$.

Beispiel: Eine Münze werde fünfmal geworfen. Sei A das Ereignis, mindestens 3 mal „Zahl" zu erzielen und B das Ereignis, bei den letzten beiden Würfen jeweils „Wappen" zu werfen.

Ω besteht also aus allen möglichen 5-stelligen „W"-"Z"-Folgen (z.B.: W,Z,W,Z,Z). A und B sind Teilmengen von Ω. Es ist

$-A$: Höchstens zweimal Zahl,

$-B$: Mindestens einmal Zahl im 4. oder 5. Wurf,

$A \cap B$: {Z,Z,Z,WW},

$A \cup B$: Entweder soll mindestens dreimal Zahl fallen oder die letzten beiden Würfe müssen Wappen zeigen,

$A \setminus B$: Alle Ereignisse in A ohne {Z,Z,Z,W,W}.

Damit haben wir geklärt, was unter zufälligen Ereignissen verstanden wird und wie aus zufälligen Ereignissen andere Ereignisse durch Verknüpfung entstehen. Dabei haben wir vermieden, das *Wesen* des Zufalls zu erklären. Gibt es Zufall überhaupt? Offensichtlich können die meisten Ereignisse nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden. Bereits der Wetterbericht für die kommende Woche macht dies deutlich. Aber wenn unser Wissen über die Entstehungsbedingungen von Ereignissen zunehmend wächst, könnte man nicht nach und nach alles exakt vorhersagen? Diese Überlegung des Philosophen und Mathematikers Pierre-Simon Laplace (1749-1827) markiert den deterministischen Pol in der Debatte um das Wesen des Zufalls. Und noch Einstein beharrte darauf, dass Gott nicht würfelt. Auf der anderen Seite besagt die heutige Sicht der Quantenphysik, dass es zumindest auf der Ebene des Mikrokosmos eine Determiniertheit nicht gibt, es existiert vielmehr eine grundsätzliche Unbestimmtheit im Verhalten von Elementarteilchen, der auch durch noch so genaue Kenntnis der aktuellen Zustände solcher Teilchen prinzipiell nicht beizukommen ist.

Die Frage nach dem Wesen des Zufalls soll an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden. Woran es auch immer liegen mag - in der Praxis, speziell in der psychologischen Praxis sind die meisten interessierenden Ereignisse gemäß obiger Definition zufällige Ereignisse. Wir müssen lernen, mit dem Zufall umzugehen. Dazu dient der Begriff der *Wahrscheinlichkeit.* Unser Ziel wird es sein, Aussagen darüber zu machen, wie wahrscheinlich zufällige Ereignisse sind.

I.A.2 Wahrscheinlichkeit

Im normalen Sprachgebrauch gibt der Begriff *Wahrscheinlichkeit* die subjektive (Un-) Gewissheit über das Eintreten eines zufälligen Ereignisses wieder. Ein Ereignis wird als um so wahrscheinlicher bezeichnet, je sicherer man von dessen Eintreten ausgehen kann. Ereignis A wird als wahrscheinlicher als Ereignis B eingeschätzt, wenn unter gleichen Ausgangsbedingungen Ereignis A häufiger eintritt als Ereignis B.

Aufgrund der Anforderung, solche „Sicherheitsaussagen“ möglichst präzise und objektiv zu machen, wurde es notwendig, Wahrscheinlichkeiten durch Zahlen auszudrücken. Wenn das Eintreten eines Ereignisses sicher ist, dann hat dieses Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1. Tritt das Ereignis ganz sicher nicht ein, so ist seine Wahrscheinlichkeit 0. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses liegt immer in dem Bereich von 0 bis 1. Je höher die Wahrscheinlichkeit ist, desto sicherer wird das Ereignis eintreten, je geringer sie ist, desto sicherer wird das Ereignis nicht eintreten. In diesem Sinne kann Wahrscheinlichkeit als Kennwert für die Eintretenssicherheit von Ereignissen aufgefasst werden. Im Unterschied zur deskriptiven Statistik bezieht sich dieser Kennwert jedoch nicht auf Daten, die schon vorliegen, sondern auf Ereignisse, die noch nicht geschehen sind.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird durch das Symbol *P*(A) ausgedrückt. *P* steht dabei als Abkürzung für „Probability“.

Die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen besteht aber nicht losgelöst voneinander. Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A sehr hoch ist, z.B. $P(\mathrm{A}) = 0.9$, dann muss die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $P(\text{-A})$ sehr klein sein, in diesem Fall $P(\mathrm{A}) = 0.1$. Wenn z.B. Heilung bei einer Therapie sehr wahrscheinlich ist, dann ist Nichtheilung sehr unwahrscheinlich. Daher wird Wahrscheinlichkeit immer für *alle* Ereignisse eines Ereignisraumes Ω angegeben[1]. Dies wird als *Wahrscheinlichkeitsverteilung* bezeichnet.

Die heute als verbindlich angesehene formale Definition einer Wahrscheinlichkeitsverteilung stammt von dem russischen Mathematiker *Andrej Nicolajewitsch Kolmogoroff*. Nach Kolmogoroff spricht man von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn für Ereignisse A und B folgendes gilt:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) Schließen sich Ereignisse A und B gegenseitig aus (d.h. $A \cap B = \varnothing$), dann gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

---

[1] Die hier gewählte Darstellung des Konzeptes „Wahrscheinlichkeitsverteilung“ ist vereinfacht und ignoriert maßtheoretische Probleme. Diese spielen jedoch für unsere praktischen Fragestellungen keine Rolle. Wer hier interessiert ist, möge sich in die mathematische Fachliteratur einarbeiten (z.B. Bauer, 2001).

Ein solches P wird *Wahrscheinlichkeitsverteilung* genannt. P(A) ist die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A.

Diese Definition enthält drei sogenannte Axiome (1) - (3). Sie drücken formal aus, was vorher in Worten über Wahrscheinlichkeit gesagt wurde: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses liegt zwischen 0 und 1 (Axiom 1) und sie wird 1, wenn das Ereignis sicher eintritt (Axiom 2). Zusätzlich ist in Axiom 3 noch festgelegt, dass sich Wahrscheinlichkeiten von vereinigten Ereignissen addieren, wenn die Ereignisse sich ausschließen.

Beispiele: Bei zufällig ausgewählten Ehepaaren in Deutschland wird nach dem Ereignis geschaut, wie viele Kinder sie haben. Es mögen folgende Wahrscheinlichkeiten gelten: P(keine Kinder) = 0.2, P(1 Kind) = 0.3, P(2 Kinder) = 0.2.

Dann gilt nach (3): P(weniger als 3 Kinder) = 0.2+0.3+0.2 = 0.7.
(3) kann angewendet werden, da niemand gleichzeitig 0, 1 oder 2 Kinder haben kann.

Bei Erwachsenen in Mitteleuropa wird nach dem Ereignis geschaut, ob sie psychische Störungen haben. Es möge gelten:
P(Angststörung) = 0.07, P(Depression) = 0.05.
Dann gilt nicht $P(\text{Angst} \cup \text{Depression}) = 0.07 + 0.05$, *denn* $P(\text{Angst} \cap \text{Depression}) \neq \varnothing$. *Es gibt Menschen, die sowohl an Angststörung als auch an Depression leiden.*

Sind bestimmte Wahrscheinlichkeiten bekannt, so kann man die Wahrscheinlichkeit anderer durch Verknüpfung entstandener Ereignisse daraus berechnen. Die folgende Liste von Rechenregeln kann dabei helfen.

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeit:

i. $P(-A) = 1 - P(A)$
Das Gegenereignis $-A$ hat immer die *Gegenwahrscheinlichkeit* $1-P(A)$.

ii. $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
Ist A in B enthalten, dann kann man die Wahrscheinlichkeit für $B \setminus A$ direkt durch die Differenz der beiden Wahrscheinlichkeiten angeben.

iii. $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(B) \leq P(\Omega) = 1$
Ist A in B enthalten, dann hat B mindestens die Wahrscheinlichkeit von A.

iv. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Die Schnittmenge muss einmal subtrahiert werden, da sie sowohl in A als auch in B enthalten ist.

Diese Rechenregeln sind in Abbildung 5 und 6 illustriert. Die Wahrscheinlichkeiten werden über Venn-Diagramme dargestellt. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses entspricht der Fläche des Ereignisses im Diagramm. Die Gesamt-