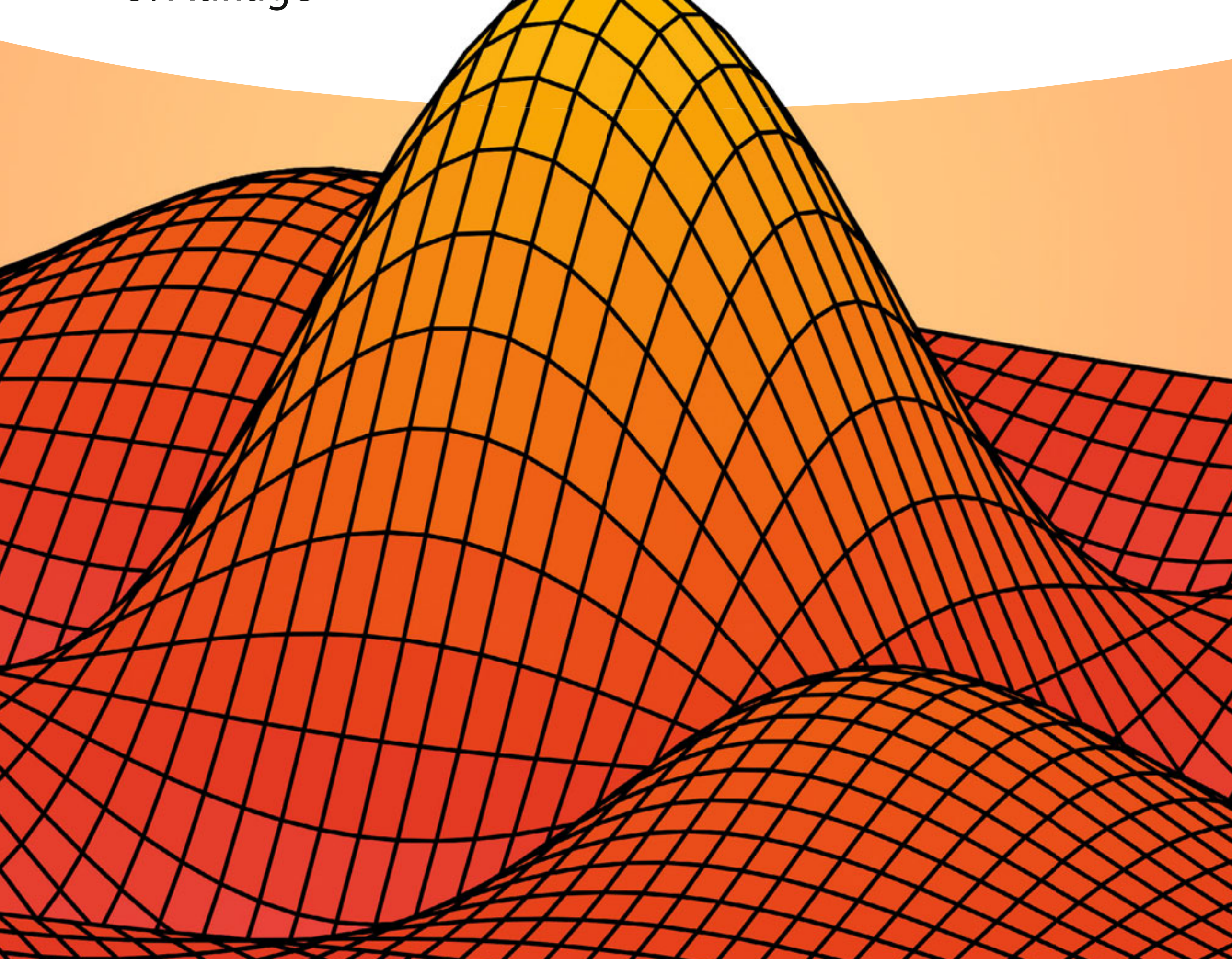
WILEY-VCH

Rainer Ansorge, Hans J. Oberle,
Kai Rothe und Thomas Sonar

Aufgaben und Lösungen

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1

5. Auflage



Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1

Aufgaben und Lösungen

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1

Aufgaben und Lösungen

Rainer Ansorge, Hans Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar

5. Auflage

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

Autoren

Rainer Ansorge
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Hans Oberle
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Kai Rothe
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Thomas Sonar
Technische Universität Braunschweig
Institut für Partielle Differentialgleichungen
Universitätsplatz 2
38106 Braunschweig

5. Auflage 2020

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Print ISBN 978-3-527-41376-8
ePDF ISBN 978-3-527-82292-8
ePub ISBN 978-3-433-82293-5

Umschlaggestaltung SCHULZ Grafik-Design, Fußgönheim, Deutschland
Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig, Deutschland

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur fünften Gesamtauflage

Seit der umfangreichen Erweiterung in der vierten Auflage und Teilung in zwei Aufgabenbände sind im laufenden Lehrbetrieb an der TU Hamburg-Harburg und der TU Braunschweig weitere Aufgaben neu entwickelt und getestet worden. Aus diesem Material haben wir mehr als sechzig neue Aufgaben und siebzig neue Bilder für den aktuellen Band ausgewählt.

In vielen Bereichen wurden alten Aufgaben neue Aufgabenteile hinzugefügt. Die Reihenfolge der Aufgaben wurde nach inhaltlichen Gesichtspunkten neu sortiert. Die Darstellung der Lösungen wurde insgesamt etwas verdichtet. Das Kapitel 10.5 „Fixpunkt-Iterationen" wurde umbenannt in „Numerische Verfahren". Die Fixpunkt-Iterationen wurden in diesem Kapitel durch Bisektions- und Newton-Verfahren ergänzt. In die Lösungen wurden exemplarisch MATLAB-Programme integriert.

Dem Wiley-VCH Verlag möchten wir danken für die Anregungen zur Verbesserung der bisherigen Auflage. Insbesondere gilt hier unser Dank Herrn Preuß und Herrn Sendtko für die freundliche Zusammenarbeit.

Hamburg, Braunschweig, im August 2019 *Die Verfasser*

Vorwort zur vierten Auflage

Das anhaltende Interesse der Studierenden an den Aufgaben des dritten Bandes erfordert jetzt eine überarbeitete und erweiterte Neuauflage des Übungsmaterials. Bedanken möchten wir uns für die vielen Hinweise und Anregungen, die es uns ermöglicht haben, Fehler zu korrigieren und Darstellungen zu verbessern.

Die vorhandenen Aufgaben haben sich seit vielen Jahren im Übungsbetrieb an der TU Hamburg-Harburg, der TU Braunschweig und anderen Technischen Universitäten bewährt. Diese alten Aufgaben sind durch viele neue, die wir in den letzten Jahren in Mathematik-Kursen für Ingenieure gestellt haben, ergänzt worden. Da wir großen Wert auf die Veranschaulichung des dargestellten Stoffes legen, haben wir zahlreiche Bilder hinzugefügt. Dabei ist das Übungsmaterial so umfangreich geworden, dass sich der Verlag Wiley-VCH bereit erklärt hat, den dritten Band in zwei Teilen erscheinen zu lassen. Unser besonderer Dank gilt hier Frau Palmer und Frau Werner für die angenehme Zusammenarbeit.

Dies ist der erste Teil, der die Aufgaben und Lösungen zur linearen Algebra und Analysis einer reellen Veränderlichen enthält, also zu den Themenbereichen (Kapitel 1–16) des ersten Bandes unseres Lehrbuches *Mathematik für Ingenieure*. Dieser Bereich ist durch über siebzig neue Aufgaben und mehr als sechzig neue Bilder erweitert worden.

Hamburg, Braunschweig, im März 2010 *Die Verfasser*

Vorwort zur dritten Auflage

Dieser dritte Band der *Mathematik für Ingenieure* stellt eine Auswahl von Aufgaben zusammen, die über viele Jahre an der Technischen Universität Hamburg-Harburg im Rahmen der Mathematikausbildung für Ingenieure während der ersten vier Semester gestellt worden sind. Als Grundlage dienen die zugehörigen zwei Lehrbuchbände *Mathematik für Ingenieure* von R. Ansorge und H.J. Oberle. Die Aufgaben orientieren sich inhaltlich an der dortigen Kapitelreihenfolge.

Wir kommen mit der Herausgabe dieses Aufgabenbandes dem langjährigen Wunsch der Studierenden nach zusätzlichem Übungsmaterial, insbesondere für die Vorbereitung auf Prüfungen, nach. Deshalb sind auch viele Aufgaben aus den schriftlichen Diplomvorprüfungen in die Auswahl eingegangen und an entsprechender Stelle als Klausuraufgaben gekennzeichnet worden. Der größte Teil der Aufgaben übt grundlegende mathematische Rechentechniken ein. Daneben sind jedoch auch immer wieder Aufgaben aus den Anwendungsbereichen eingeflossen und an geeigneter Stelle auch Aufgabentypen von theoretischer Natur. Wir hoffen somit einen breiten Bereich an Themen abgedeckt zu haben, der für viele Naturwissenschaftler und nicht zuletzt auch für Mathematiker interessant ist.

Im ersten Abschnitt, in den Kapiteln A.1–A.27, befinden sich die Aufgaben und im anschließenden zweiten Abschnitt, in den Kapiteln L.1–L.27, die zugehörigen Lösungen. Querverweise auf Sätze und Definitionen mit entsprechender Nummernangabe beziehen sich auf die beiden Lehrbuchbände.

Ein solches Werk kann natürlich nicht entstehen ohne die Hilfe vieler Kollegen, die uns mit Ideen, Anregungen, Aufgaben und auch Bildern zur Seite gestanden haben. Unser Dank gilt hierbei insbesondere Carl Geiger und Reiner Hass. In den letzten beiden Jahrgängen wurden die Aufgaben dieses Bandes in den Kursen Mathematik für Ingenieure gründlich behandelt und wir hoffen, dass dadurch Fehler aller Art auf ein Minimum reduziert worden sind. Besonderen Dank möchten wir hier Peywand Kiani und Andreas Meister für Ihre gründliche Prüfung aussprechen. Sollten dennoch an der einen oder anderen Stelle Fehler verblieben sein, so bitten wir dies zu entschuldigen und sind für Hinweise dankbar.

Dem Verlag, insbesondere Frau Gesine Reiher, möchten wir unseren Dank aussprechen für die freundliche Zusammenarbeit, die kritische Durchsicht des Manuskriptes und die Bereitschaft die ersten beiden Bände mit diesem dritten Aufgabenband abzurunden.

Hamburg, Braunschweig, im Februar 2000 *Die Verfasser*

A 1
Aussagen, Mengen und Funktionen

A1.1 Aussagen

Aufgabe A1.1.1
Für folgende Aussagenverbindungen gebe man die Wahrheitstafeln an:

a) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$, b) $(A \vee B) \wedge C$,
c) $(A \wedge B) \vee \neg(B \wedge C)$, d) $(A \Rightarrow B) \wedge B$.

Können c) und d) vereinfacht dargestellt werden?

Aufgabe A1.1.2
a) Man gebe für folgende Aussagen die Wahrheitstafeln an:

i) $((A \wedge B) \vee \neg A) \ \wedge \ ((A \wedge B) \vee \neg B)$, ii) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \vee C)$, iii) $A \wedge \neg B$.

b) Man zeige, dass folgende Aussagen Tautologien sind:

i) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$, ii) $\neg(A \wedge \neg A)$,
iii) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, iv) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$,
v) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, vi) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

Aufgabe A1.1.3
Man zeige mittels eines indirekten Beweises:

a) Für alle reellen Zahlen a und b gilt

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} .$$

b) $\log_{10} 2$ ist keine rationale Zahl.
c) Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} .$$

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1, Aufgaben und Lösungen, 5. Aufl.
Rainer Ansorge, Hans Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar.

Aufgabe A1.1.4

a) Man beweise indirekt, dass für ungerade Zahlen a, b und c

$$ax^2 + bx + c = 0$$

keine rationale Lösung x besitzt.

b) Mit Hilfe der Dreiecksungleichung beweise man für reelle Zahlen a und b direkt

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \, .$$

Aufgabe A1.1.5

Man beweise direkt:

a) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für} \quad q \neq 1 \, ,$

b) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2} \, .$

Aufgabe A1.1.6

a) Man bestimme die natürliche Zahl N, so dass für $n \geq N$ gilt (direkter Beweis): i) $3^n > n^4$, ii) $n! \geq 4^n$.

b) Gegeben seien die folgenden natürlichen Zahlen

$$n = 2j(j + 1) \, , \quad m = 2j + 1 \quad \text{mit} \quad j \in \mathbb{N} \, .$$

Man zeige, dass auch die Summe $n^2 + m^2$ der Quadratzahlen wieder das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Aufgabe A1.1.7

a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq b$ beweise man die Behauptung

$$\text{B:} \quad a \leq \frac{2ab}{a + b} \qquad \text{i) indirekt und ii) direkt .}$$

b) Man beweise indirekt die Behauptung

$$\text{B:} \quad \sqrt{23} \ \text{ist irrational.}$$

c) Man entscheide und begründe ohne Verwendung eines Taschenrechners, welche der beiden Zahlen größer ist:

$$\sqrt{7} + \sqrt{11} \quad \text{oder} \quad \sqrt{8} + \sqrt{10} \, .$$

A1.2 Mengen

Aufgabe A1.2.1

Gegeben seien die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \colon -3 < x < 4\} \, , \quad B := \{x \in \mathbb{R} \colon 2 \leq x\} \, , \quad C := \{x \in \mathbb{R} \colon -1 \leq x < 1\} \, .$$

Man bestimme

a) $A \cap C$, b) $A \cap B$, c) $A \cup B \cup C$,
d) $A \cap (B \cup C)$, e) $\mathbb{R} \backslash B$, f) $A \backslash C$,
g) $(\mathbb{R} \backslash C) \cup B$, h) $C \cup (\mathbb{R} \backslash B)$, i) $(\mathbb{R} \cap B) \cup A$,
j) $(\mathbb{R} \cup A) \backslash B$, k) $((A \backslash B) \cap C) \cup A$, l) $((A \cup B) \cap C) \backslash A$.

Aufgabe A1.2.2
Man berechne die Lösungsmengen von

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$, b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$, d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq e^x \leq 27\}$

und bestimme $A \cup D$, $D \backslash C$ sowie $B \cap D$.

Aufgabe A1.2.3
a) Man gebe die reellen Zahlen x an, für die folgende Ungleichungen erfüllt sind:

i) $\dfrac{3}{|x+2|} < 2 - 3x$, ii) $\sqrt{|x+2|} \leq |x+1|$.

b) Man betrachte die Wheatstonesche Brückenschaltung (siehe Abb. 1.1). Durch Verschieben des Schleifkontaktes B wird die Spannung zwischen den Punkten A und B auf 0 gebracht. Der zu messende Widerstand x berechnet sich in Abhängigkeit von R und ℓ folgendermaßen:

$$x = \frac{\ell}{50\,\text{cm} - \ell} R .$$

In welchem Bereich variiert x, wenn bekannt ist, dass $28\,\Omega \leq R \leq 29\,\Omega$ und $1{,}9\,\text{cm} \leq \ell \leq 2{,}1\,\text{cm}$ gilt?

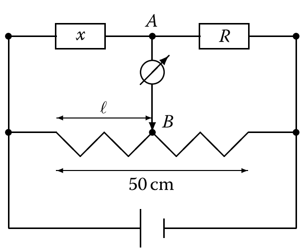


Abb. 1.1 Wheatstonesche Brückenschaltung.

Aufgabe A1.2.4
Man bestimme alle reellen Werte x, für die gilt:

a) $\dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{1}{1+x} = 1$, b) $\dfrac{1 - 1/x}{1 + 1/x} + \dfrac{1 + 1/(x+2)}{1 - 1/(x+2)} = 2$,

c) $\sqrt{x-3} + 1 = \sqrt{x}$, d) $\dfrac{\sqrt{5-2x}}{5-4x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-8x}}$,

e) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} = 0$, f) $\sqrt{x+2} = x$,
g) $|2 - |1 - |x||| \leq 3$, h) $|x+2| - |x-3| = 3$.

Aufgabe A1.2.5

a) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$50 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{1000} \ ?$$

b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{i)}\quad |4 - |x|| \leq x\,, \quad \text{ii)}\quad (x-1)^2 - 1 \leq 2 - |x-2|\,, \quad \text{iii)}\ (x-3)^2 < \frac{1}{x-3}\,.$$

c) Man bestimme die Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ für die gilt: $|y| \leq \sqrt{|4 - x^2|}$.

Aufgabe A1.2.6

In der x-y-Ebene skizziere man den Lösungsbereich von

a) $|x-2| + 2 \leq |y|$, b) $\max\{|x|, |y|\} \leq 1$, sowie die Mengen

c) $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{3} \left[\, 2j, 2j+1 \,\right[\times \bigcup_{j=1}^{4} \left]\, 2(j-1), 2j-1 \,\right]$.

Aufgabe A1.2.7

Man skizziere in der x-y-Ebene die folgenden Mengen:

a) $M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y-2| \leq x \ \wedge\ |y-2| < 1\right\}$,
b) $M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\right\}$,
c) $M_3 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid$
$\quad |y| > 1 \ \wedge\ \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \leq 1 \ \vee\ \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \leq 1\right)\Big\}$.

Klausuraufgabe A1.2.8

Man skizziere die Mengen

$$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid: x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -1 \leq x \leq 0\right\} \quad \text{und}$$
$$M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid: x^2 + y^2 \leq 9 \wedge 0 \leq y \leq 2\right\}\,.$$

A1.3 Funktionen

Aufgabe A1.3.1

Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt:

a) $\dfrac{1}{4} \leq \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, b) $e^x \leq \dfrac{1}{e^{2x+1}}$.

Aufgabe A1.3.2

Man zeige mittels der Additionstheoreme von sin bzw. cos, dass folgende Beziehung gilt:

a) $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2 x}}$ mit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Von folgenden Funktionsvorschriften $y = f(x)$ mit reellem x und y sind der größtmögliche Definitionsbereich D und der zugehörige Bildbereich $f(D)$ anzugeben:

b) $y = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$, c) $y = \sqrt{1-|x|}$, d) $y = \ln(x^2+3x+2)$.

Aufgabe A1.3.3
Für reelles x seien die folgenden Funktionsvorschriften $y = f(x)$ gegeben:

a) $y = \ln(\sqrt{x+a})\quad a \in \mathbb{R}$, b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$, c) $y = \dfrac{x-4}{-x^2+5x-4}$,

d) $y = \sqrt{(x-3)(2-x)}$, e) $y = n$ für $n < x \leq n+1$, $n \in \mathbb{Z}$,

f) $y = \sqrt{\dfrac{5x-1}{3x+1}-1}$.

Man gebe jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich D und den zugehörigen Bildbereich $f(D)$ an.

Aufgabe A1.3.4
a) Man untersuche die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c ,$$

in Abhängigkeit von a, b und c auf Injektivität und Surjektivität.
b) Für die folgende Funktion $f(x)$ ist eine Darstellung als Komposition aus „elementaren“ Funktionen anzugeben (Tastenfolge bei der Auswertung auf einem Taschenrechner):

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-\sqrt{\sin x}}}{(1-\cos^2(\sqrt{x}))^5} .$$

Wie lauten die Definitionsbereiche?

Aufgabe A1.3.5
a) Man zeige ohne Benutzung eines Taschenrechners, dass $\sinh 1 > 1$ ist. Man verwende die Definitionen

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} , \quad \sinh y := \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) ,$$

und rechne mit Ungleichungen! Die Umformungen sind genau zu begründen!
Hinweis: Man zeige und verwende, dass $(e-1)^2 > 2$ gilt.

b) Eine Funktion heißt *gerade* Funktion, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt, sie heißt *ungerade* Funktion, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\,, \quad g(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}\,, \quad h(x) = x + \cos x\,?$$

Aufgabe A1.3.6

a) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:
   i) $f_1\colon [-5,5] \to [-2,2]\,, \quad f_1(x) = 1 - |2 - |x||\,,$
   ii) $f_2\colon [0,1] \to [0,2]\,, \quad f_2(x) = x^4\,,$
   iii) $f_3\colon [0,\pi/2] \to [0,1/2]\,, \quad f_3(x) = \sin x \cos x\,,$
   iv) $f_4\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[\,, \quad f_4(x) = e^x\,.$

b) Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):
   a) $f_5(x) = \cos x + 2^x + 2^{-x}\,,$
   b) $f_6(x) = x^3 + \sin(2x)\,.$

Aufgabe A1.3.7

Für die Funktion

$$f\colon [a,\infty[\to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y = f(x) := x^2 - 6x + 11$$

bestimme man die kleinste Zahl a, so dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Man berechne die Umkehrfunktion, gebe deren Definitions- und Wertebereich an und zeichne den Funktionsgraphen von f^{-1}.

Aufgabe A1.3.8

a) Man vereinfache die folgende Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + 4x + 4}{x} - \ln(x+2) + \ln(x)\,.$$

b) Für die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 31}{x^2 + 6x + 11}$$

   spalte man den polynomialen Anteil durch Polynomdivision ab.

c) Für das Polynom

$$p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35$$

   bestimme man die Linearfaktorzerlegung unter Verwendung der Methode der Polynomdivision.

Aufgabe A1.3.9

Zu den Abbildungsvorschriften $f(x)$ und $g(x)$ seien die folgenden Funktionsgraphen gegeben (siehe Abb. 1.2).

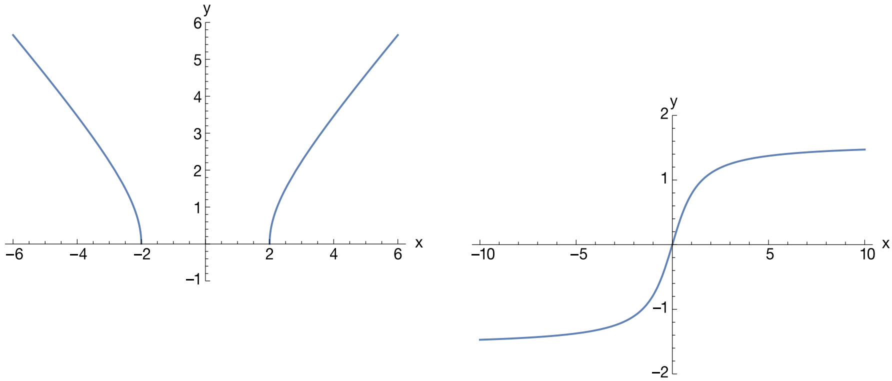


Abb. 1.2 $f(x) = ?$ $g(x) = ?$

a) Man begründe, welche der Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \arctan(x)\,,\quad f_2(x) = \sqrt{|x| - 2}\,,\quad f_3(x) = \sqrt{x^2 - 4}\,,\quad f_4(x) = \sqrt[3]{x}$$

mit $f(x)$ und welche mit $g(x)$ übereinstimmt.

b) Man untersuche, ob es sich bei f und g um gerade, ungerade oder beschränkte Funktionen handelt.

c) Anhand der Funktionsgraphen von f und g gebe man die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst oder fällt und konkav oder konvex (von unten) ist.

A 2
Zahlenbereiche

A2.1 Natürliche Zahlen

Aufgabe A2.1.1
Man schreibe um in eine Summe bzw. ein Produkt:

a) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 \mp \cdots - 55 = \sum_{k=0}^{?} \cdots \quad = \sum_{j=1}^{?} \cdots$

b) $1 - 3 + 9 - 27 + 81 \mp \cdots \quad = \sum_{k=0}^{?} \cdots \quad = \sum_{j=1}^{?} \cdots$

c) $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{25} \cdot \frac{8}{125} \cdots \frac{18}{390\,625} = \prod_{n=1}^{?} \cdots$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdots \quad = \prod_{n=1}^{?} \cdots$

Aufgabe A2.1.2
Man beweise die folgenden Aussagen:

a) $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$, b) $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} = \frac{2^n}{n!}$,

c) $\sum_{i=1}^{n}(i^2 - 1) = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n)$.

Aufgabe A2.1.3
Man weise die Gültigkeit der folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ nach:

a) $a_n = 5^n - 1$ ist durch 4 teilbar,

b) $b_n = 6^n - 5n + 4$ ist durch 5 teilbar,

c) $c_n = n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar,

d) $d_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ ist durch 9 teilbar,

e) $e_n = \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3)$ ist eine natürliche Zahl.

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1, Aufgaben und Lösungen, 5. Aufl.
Rainer Ansorge, Hans Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar.

Aufgabe A2.1.4
Man beweise durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

a) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$,

b) die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (\forall x \geq -1)$,

c) $\prod_{j=1}^{n}(1+x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j$ mit $x_j \geq 0$.

Aufgabe A2.1.5
Man beweise mittels vollständiger Induktion:

a) Ist $x_0 = a,\ x_1 = b$ und $x_n = -3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ für $n \geq 2$, so gilt

$$x_n = (2a+b)(-1)^n - (a+b)(-2)^n \quad \text{für} \quad n \geq 0 .$$

b) Für die rekursiv definierten Fibonacci-Zahlen mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$ gilt:

$$a_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} .$$

Klausuraufgabe A2.1.6
Man beweise durch vollständige Induktion

a) $\sum_{j=3}^{n} \frac{2}{j^2 - 2j} = \frac{3}{2} - \frac{2n-1}{n(n-1)}$,

b) $\sum_{j=2}^{n} \frac{2}{j^2 - 1} = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$,

c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{4}{5^k} = 5 - \frac{1}{5^n}$,

d) $\sum_{k=1}^{n} (4k+1) = n(2n+3)$,

e) $\sum_{k=1}^{n} (2k+3) = n(n+4)$.

Aufgabe A2.1.7
a) Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{j+1}{j}\right) = n + 1$.
b) Zur Berechnung von $\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{2}{k})$ finde man eine Formel (notfalls durch Probieren) und beweise diese (ggf. durch vollständige Induktion).

Aufgabe A2.1.8
a) Welche Endziffern sind bei $n!$ möglich?
b) Man begründe ohne Verwendung eines Taschenrechners auf wie viele Nullen die Zahl 26! endet.

Aufgabe A2.1.9

a) Durch vollständige Induktion für festes $k \in \mathbb{N}$ und $n \geq k$ beweise man

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} \binom{j}{k} = \frac{1}{k} \binom{n}{k} .$$

b) Mit Hilfe des binomischen Satzes zeige man für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ die Abschätzung

$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n^2}{4} x^2 .$$

Aufgabe A2.1.10

Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m \in \mathbb{N}$ weise man folgende Beziehungen nach:

a) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$, b) $\binom{n}{m} \cdot \frac{n-m}{m+1} = \binom{n}{m+1}$,

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Aufgabe A2.1.11

Für die folgenden Zahlen bestimme man ggT und kgV:

a) 2210 und 2145, b) 3185 und 126.

Aufgabe A2.1.12

a) Man bestimme den ggT von $m = 2304$ und $n = 960$ und stelle ihn als $\mathbb{Z}$-Kombination von m und n dar.

b) Man zeige: Eine diophantische Gleichung $mx + ny = k$ mit $m, n, k \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ kann nur dann eine Lösung besitzen, falls ggT(m, n) die Zahl k teilt. Wie lässt sich dann mit Hilfe des euklidischen Algorithmus eine Lösung von $mx + ny = k$ finden?

c) Man bestimme eine Lösung $x, y \in \mathbb{Z}$ von $2304x + 960y = 576$.

A2.2 Reelle Zahlen

Aufgabe A2.2.1
Was stimmt an folgender Rechnung nicht?
Für ein festes $x \in \mathbb{R}$ werde $y \in \mathbb{R}$ durch $y = 2x/3$ berechnet

$$\begin{array}{lclcl}
\Rightarrow & 3y + 2 = 2x + 2 & \Rightarrow & 4(3y + 2) = 4(2x + 2) \\
\Rightarrow & 12y + 8 = 8x + 8 & \Rightarrow & (42 - 30)y = (28 - 20)x \\
\Rightarrow & 28x - 42y = 20x - 30y & \Rightarrow & 7(4x - 6y) = 5(4x - 6y) \\
\Rightarrow & 7 = 5\,. & &
\end{array}$$

Aufgabe A2.2.2
a) Bei der Parallelschaltung zweier Ohmscher Widerstände R_1 und R_2 ergibt sich der Gesamtwiderstand R_p aus $1/R_\mathrm{p} = 1/R_1 + 1/R_2$. Bei der Hintereinanderschaltung berechnet sich der Gesamtwiderstand durch $R_\mathrm{h} = R_1 + R_2$. Man zeige, dass die Gesamtwiderstände R_p und R_h die Ungleichung $R_\mathrm{h} \geq 4R_\mathrm{p}$ erfüllen. (Wann gilt das Gleichheitszeichen?)
b) Man untersuche die Menge

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{1}{n+1} + \frac{1 + (-1)^n}{2n}\,, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

auf Beschränktheit und bestimme ggf. Infimum und Supremum.

Aufgabe A2.2.3
a) Man bestimme von $(711)_{10}$ die Dual- und die 3-adische Darstellung.
b) Man gebe für $(973)_{10}$ die 5-adische Darstellung an.
c) Man wandle die folgenden periodischen Zifferndarstellungen der rationalen Zahlen r_k in die Form $r_k = (n_k)_{10}/(m_k)_{10}$ mit $n_k, m_k \in \mathbb{N}$ (teilerfremd) um:

$$r_1 = (3{,}\overline{12})_4\,, \quad r_2 = (4{,}\overline{121})_5\,, \quad r_3 = (41{,}\overline{69})_{10}\,.$$

d) Man bestimme die ersten 7 Stellen der 3-adischen Darstellung von $(4{,}165)_7$ unter Benutzung der iterierten Multiplikation im Siebenersystem.

Aufgabe A2.2.4
a) Man bestimme die Dualdarstellung von $n = 1285$
   i) mit Hilfe iterierter Division,
   ii) durch Auswertung von $1285 = ((1 \cdot 10 + 2)10 + 8)10 + 5$ im Dualsystem.
b) Man bestimme die ersten 10 Stellen der 3-adischen Darstellung von $x_0 = (0{,}7431)_8$ über das Verfahren der iterierten Multiplikation im Oktalsystem.
c) Man verwandle die folgenden periodischen Zifferndarstellung der rationalen Zahlen r_k in die Form $r_k = (n_k)_{10}/(m_k)_{10}$ mit $n_k, m_k \in \mathbb{N}$:

$$r_1 = 31{,}5\overline{271}\,, \quad r_2 = (0{,}\overline{123})_4\,, \quad r_3 = (5{,}\overline{65})_7\,.$$

A2.3 Komplexe Zahlen

Aufgabe A2.3.1
Um welche Gebilde handelt es sich anschaulich bei folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$G_1 = \{z \mid z = (1+i) + \lambda(5-2i)\,,\ \ \lambda \geq 0\}\,, \quad G_2 = \{z \mid |(1+i)z| = 5\}\,,$$
$$G_3 = \{z \mid z = (3+i) + 5e^{i\varphi},\ \ \varphi \in \mathbb{R}\}\,, \quad G_4 = \{z \mid |z-3| < 2|z+3|\ \}\,,$$
$$G_5 = \{z \mid \operatorname{Re}(1/z) = 1,\ \ z \neq 0\}\,, \quad G_6 = \{z \mid \operatorname{Im} z^2 \leq 2\}\ ?$$

Aufgabe A2.3.2
Man beschreibe anschaulich die Kurven in der komplexen Ebene, die durch die folgenden Gleichungen gegebenen sind:

a) $|z| = 2\,,$ b) $\operatorname{Im}(z+i) = 4\,,$ c) $|z+3-4i| = 5\,,$
d) $\arg(z \cdot \exp(-\pi i/4)) = 0\,,$ e) $z\overline{z} - 3iz + 3i\overline{z} + 8 = 0\,,$ f) $\operatorname{Re} z^2 = 0\,.$

Aufgabe A2.3.3
a) Man bestimme Real- und Imaginärteil von

$$\text{i)}\ z = \frac{1+2i}{3-4i}\,, \quad \text{ii)}\ z = \overline{\left(\frac{2}{1-i}\right)}\,, \quad \text{iii)}\ z = (i-1)^4 + (-1-i)^4\,.$$

b) Man bestimme die Polardarstellung $z = r\,e^{i\varphi}$ von

$$\text{i)}\ z = 1 - i\,, \quad \text{ii)}\ z = \frac{2}{1-i}\,, \quad \text{iii)}\ z = (1-i)^7\,.$$

Aufgabe A2.3.4
a) Man berechne Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}\,, \quad z_2 = \frac{1+i}{1-(1+i)^2} \quad \text{und} \quad z_3 = \left(\frac{2i}{1-i}\right)^9\,.$$

b) Man berechne alle Lösungen der Gleichungen
i) $z^3 + i = 0\,,$ ii) $z^5 = 16 + \sqrt{768}\,i\,,$ iii) $5z^2 - 2z + 5 = 0\,,$
iv) $z^2 + 2z - i = 0\,.$

Klausuraufgabe A2.3.5
Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{3}{2}i + \frac{2-i}{(1+i)^2} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{2}\,(1+i)\,.$$

a) Man bestimme Real- und Imaginärteil von z_1 sowie die Polardarstellung von z_1 und z_2.
b) Man berechne z_2^8.
c) Wie lauten alle Lösungen w der Gleichung $(w - z_2)^4 = -16$? Man gebe die Lösungen in Polardarstellung und in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe A2.3.6

a) Man berechne Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^8 \quad \text{und} \quad z_2 = (-1+\sqrt{3}i)^{11} .$$

b) Man löse die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

i) $z^2 - 6z + 13 = 0$, ii) $z^4 + 1 = 0$, iii) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2z + 3i$.

Aufgabe A2.3.7

Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 := -\frac{3}{2}i + \frac{2+i}{(1-i)^2} \quad \text{und} \quad z_2 := \sqrt{2}(-1+i) .$$

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^4.

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w - z_2)^4 = 16$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe A2.3.8

Gegeben sei das Polynom $p(z) = z^4 - iz^3 + z^2 + iz - 2$. Man berechne $p(1)$ und $p(2i)$ und gebe alle Nullstellen von p in kartesischen und in Polarkoordinaten an.

Aufgabe A2.3.9

Man berechne alle Lösungen der folgenden Gleichungen in kartesischen Koordinaten:

a) $z^2 + iz - \dfrac{1}{2} = 0$, b) $z^4 + 1 - i = 0$, c) $z^3 - z^2 - z + 1 = 0$,

d) $z^6 - 4z^5 + 5z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4 = 0$

(*Tipp:* $z = 2$ ist mehrfache Lösung) .

Aufgabe A2.3.10

a) Man dividiere das Polynom $p(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ mit $z \in \mathbb{C}$ durch $z - 1$ und gebe das Ergebnis in der Gestalt $p(z) = q(z)\,(z-1) + r(z)$ mit Polynomen $q(z)$ und $r(z)$ an.

b) Für das Polynom $p(z) = 7z^7 + 3z^3 + 200z^2 - 50z + 20$ bestimme man mit Hilfe des Horner-Schemas $p(-2)$ und den ganzen Anteil von $p(z) : (z+2)$.

Aufgabe A2.3.11

a) Man zeige: Ist $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$ ein reelles Polynom ($a_k \in \mathbb{R}$) und ist $b \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(z)$, so ist auch $\overline{b}$ Nullstelle von $p(z)$.

b) Für das Polynom $p(z) = z^6 - z^5 - z^4 + 5z^3 - 6z^2 + 6z - 4$ berechne man $p(1+i)$, $p(-i)$ und zerlege $p(z)$ in Linearfaktoren.