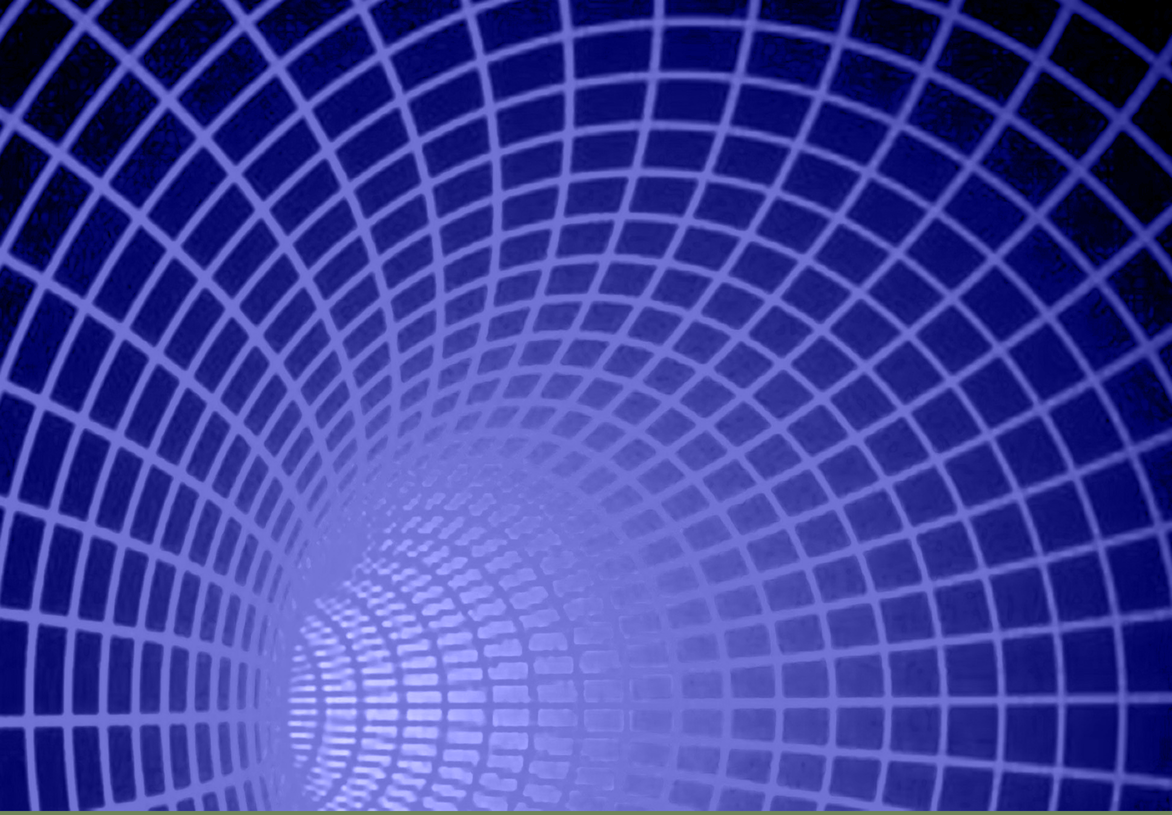


Análisis funcional

W. Rudin

EDITORIAL REVERTÉ

Análisis funcional

W. Rudin

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:

Functional Analysis

Edición original en lengua inglesa publicada por:

McGraw-Hill Book Company, New York

Edición en español

Edición en papel:

ISBN- 978-84-291-5115-2

Edición e-book (PDF):

ISBN: 978-84-291-9130-1

Versión española por:

Jesús Fernández Novoa
Profesor Adjunto de la Facultad de Ciencias
de la Universidad Complutense de Madrid

y

Luis Bou García
Prof. Jefe de Estudios del Instituto Nacional de Enseñanza Media de Zalaeta
La Coruña

Revisada por:

Dr. Enrique Linés Escardó
Catedrático de la Facultad de Ciencias
de la Universidad de Madrid

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto 13-15 Local B
08029 Barcelona
Tel: (+34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

737

Índice analítico

Prólogo

El Análisis Funcional se propone estudiar ciertas estructuras topológico-algebraicas y los métodos que el conocimiento de estas estructuras permite aplicar a los problemas analíticos.

Un buen texto de carácter introductorio a este tema debería contener una exposición de su axiomática (es decir, de la teoría general de espacios vectoriales topológicos), debería tratar con cierta profundidad unos cuantos aspectos de la teoría y, asimismo, debería mostrar varios ejemplos interesantes de aplicación a otras ramas de la Matemática. Espero que el presente libro satisfaga dichos requisitos.

El tema es ya muy amplio y continúa creciendo con rapidez. (La bibliografía en el volumen 1 de [4] sólo llega hasta 1957 y ocupa 96 páginas.) Por consiguiente, para poder escribir un libro de tamaño razonable ha sido necesario seleccionar ciertas áreas e ignorar totalmente otras. Soy consciente de que prácticamente todos los iniciados que ojeen el índice echarán en falta algunos de sus (y mis) temas favoritos; tal situación es, al parecer, inevitable. No ha sido mi intención escribir una obra enciclopédica, sino un libro que abriera el camino para una exploración posterior más amplia.

Por esta razón se han omitido muchos temas de carácter especialmente esotérico, que podrían hallar lugar en la presentación de la teoría general de espacios vectoriales topológicos. Por ejemplo, no se exponen los espacios uniformes, ni la convergencia Moore-Smith, ni las teorías de redes o de filtros. La noción de completitud aparece tan sólo en relación con los espacios métricos. No se mencionan ni los espacios bornológicos ni los tonelados. Se expone la teoría de la dualidad, pero no en toda su extensión. La integración de funciones vectoriales tiene un trata-

miento puramente instrumental que se concreta al considerar solamente integrandos continuos con valores en un espacio de Fréchet.

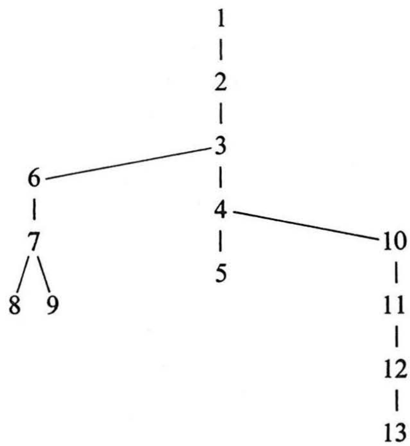
No obstante, el contenido de la parte I es perfectamente suficiente para casi todas las aplicaciones a problemas concretos. Al tomar este rumbo es preciso subrayar que la estrecha interacción entre lo abstracto y lo concreto es no sólo la característica más útil de toda esta teoría, sino también la más fascinante.

He aquí algunas características de los temas seleccionados. Se presenta gran parte de la teoría general de espacios topológicos sin introducir la hipótesis de convexidad local. Las propiedades fundamentales de los operadores compactos se obtienen de la teoría de dualidad en espacios de Banach. En el capítulo 5 se utiliza de varias formas el teorema de Krein-Milman sobre existencia de puntos extremales. La teoría de distribuciones y la transformación de Fourier han sido expuestas con bastante detalle, y se aplican (en dos capítulos muy breves) a dos problemas de ecuaciones en derivadas parciales, así como al teorema tauberiano de Wiener y dos de sus aplicaciones. El teorema espectral se deduce de la teoría de álgebras de Banach (concretamente, de la caracterización de Gelfand-Naimark de las B^*-álgebras conmutativas); probablemente no sea éste el camino más breve, pero, sin duda, es fácil. Se discute con considerable detalle el cálculo simbólico en álgebras de Banach; lo mismo se hace con las involuciones y los funcionales positivos. Se incluyen también varios resultados muy recientes sobre álgebras de Banach que todavía no han hallado lugar en otros textos.

Se presupone al lector familiarizado con la teoría de la medida y con la integración de Lebesgue (incluidos hechos tales como la completitud de los espacios L^p), con ciertos conocimientos básicos de las funciones holomorfas (tales como la forma general del teorema de Cauchy y el teorema de Runge) y con la formación topológica exigida por los temas anteriores. Otros requisitos topológicos se exponen brevemente en el Apéndice A. Prácticamente no se precisa más álgebra que la implícita en la noción de homomorfismo.

El Apéndice B reúne las referencias de carácter histórico. Algunas dan las fuentes originales; otras, libros, trabajos y artículos expositivos en los que se pueden encontrar referencias más amplias. Evidentemente, hay muchos puntos de los que no se da documentación alguna. La ausencia de referencia explícita no implica, en ningún caso, pretensión alguna de originalidad por mi parte.

La mayor parte de las aplicaciones se hallan en los capítulos 5, 8 y 9. Existen también algunas en el capítulo 11 y en los ejercicios, que superan los 250, en muchos de los cuales se dan orientaciones al lector. La interdependencia de capítulos se muestra en el diagrama siguiente:



El libro procede de un curso que el autor expuso en la Universidad de Wisconsin. He tenido fructíferas conversaciones con algunos de mis colegas, especialmente con Patrick Ahern, Paul Rabinowitz, Daniel Shea y Robert Turner. Es un placer expresarles aquí mi agradecimiento.

Walter Rudin

Primera parte

Teoría general

Capítulo 1

Espacios vectoriales topológicos

Introducción

1.1 En muchos problemas de Análisis no se persigue el estudio de entes individuales —una función, un operador— sino amplias colecciones de tales objetos. Con gran frecuencia, en los casos de interés, tales colecciones resultan ser espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales o de los complejos. Como en todo problema analítico intervienen (explícita o implícitamente) procesos de paso al límite, no causará sorpresa que dichos espacios vectoriales estén dotados de métricas o, al menos, de topologías, que guarden alguna relación natural con los objetos que constituyen el espacio. El método más sencillo e importante de conseguirlas consiste en introducir una *norma*. La estructura así obtenida (definida más adelante) se llama espacio vectorial normado, o espacio lineal normado, o simplemente, *espacio normado*.

A lo largo de todo el libro, el término *espacio vectorial* significa espacio vectorial sobre el cuerpo complejo $\mathbb{C}$ o sobre el cuerpo real R. Con ánimo de ofrecer una exposición completa, daremos definiciones detalladas en la sección 1.4.

1.2 Espacios normados. Un espacio vectorial X se llama *espacio normado* cuando a cada $x \in X$ está asignado un número real no negativo $\|x\|$, llamado *norma* de x, de manera que

(*a*) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera x e y de X,
(*b*) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ si $x \in X$ y α es un escalar,
(*c*) $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$.

La palabra «norma» se usa también para denotar la *función* que aplica x en $\|x\|$.

Todo espacio normado puede considerarse como un espacio métrico, en el que la distancia $d(x, y)$ entre x e y es $\|x - y\|$. Las propiedades características de d son:

(*i*) $0 \leq d(x, y) < \infty$ para cualesquiera x e y,
(*ii*) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$,
(*iii*) $d(x, y) = d(y, x)$ para cualesquiera x e y,
(*iv*) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para cualesquiera x, y, z.

En un espacio métrico, la *bola abierta* de centro x y radio r es el conjunto

$B_r(x) = \{y \colon d(x, y) < r\}$.

En particular, si X es un espacio normado, los conjuntos

$B_1(0) = \{x \colon \|x\| < 1\}$ y $\bar{B}_1(0) = \{x \colon \|x\| \leq 1\}$

son la *bola unitaria abierta* y la *bola unitaria cerrada* de X, respectivamente.

Se define un subconjunto de un espacio métrico como abierto si, y sólo si, es una unión (puede ser vacía) de bolas abiertas, y así se obtiene una *topología*. (Ver sección 1.5.) Es fácil comprobar que las operaciones de espacio vectorial (suma y multiplicación por escalares) son continuas en esta topología, si la métrica proviene de una norma, como se ha indicado.

Un *espacio de Banach* es un espacio normado que es *completo* en la métrica definida por su norma; es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente hacia un elemento del espacio.

1.3 Muchos de los espacios de funciones más conocidos son espacios de Banach. Mencionaremos solamente algunos ejemplos: espacios de funciones continuas sobre espacios compactos; los familiares espacios L^p que aparecen en la teoría de integración; los espacios de Hilbert —los parientes más próximos a los espacios euclídeos; algunos espacios de funciones diferenciables; espacios de aplicaciones lineales continuas de un espacio de Banach en otro; álgebras de Banach. Todos ellos irán apareciendo en el texto.

Pero existen también muchos espacios importantes que salen de este marco. He aquí algunos ejemplos:

(*a*) $C(\Omega)$, el espacio de todas las funciones complejas continuas sobre un cierto conjunto abierto Ω de un espacio euclídeo R^n.

(*b*) $H(\Omega)$, el espacio de todas las funciones holomorfas en un conjunto abierto Ω del plano complejo.

(*c*) C_K^∞, el espacio de todas las funciones complejas infinitamente diferenciables sobre R^n que se anulan fuera de un conjunto compacto prefijado K, con interior no vacío.

(*d*) Los espacios $\mathscr{D}(\Omega)$ que se usan en la teoría de distribuciones, y las distribuciones mismas.

Las topologías naturales de estos espacios no pueden ser inducidas por normas, como veremos más adelante. Estos, así como los espacios normados, son ejemplos de *espacios vectoriales topológicos*, noción que se difunde por todo el Análisis funcional.

Después de este breve intento de motivación, damos a continuación las definiciones detalladas y después (en la sección 1.9) un programa de los resultados del capítulo I.

1.4 Espacios vectoriales. Las letras R y $\mathbb{C}$ denotarán en lo que sigue el cuerpo de los números reales y el cuerpo de los números complejos, respectivamente. Por el momento, Φ representará bien R o bien $\mathbb{C}$. Un *escalar* es un elemento del *cuerpo de escalares* Φ. Un *espacio vectorial sobre* Φ es un conjunto X, cuyos elementos se llaman vectores, sobre el que están definidas dos operaciones, *suma* y *multiplicación por escalares*, con las usuales propiedades algebraicas siguientes:

(*a*) A cada par de vectores x e y corresponde un vector $x + y$, de tal modo que

$$x+y=y+x \quad \text{y} \quad x+(y+z)=(x+y)+z;$$

X contiene un único vector 0 (el *vector nulo* u *origen* de X) tal que $x + 0 = x$ para cada $x \in X$; y para cada $x \in X$ existe un único vector $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

(*b*) A cada par (α, x) con $\alpha \in \Phi$ y $x \in X$ corresponde un vector αx, de tal modo que

$$1x = x, \qquad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$$

y las dos propiedades distributivas

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \qquad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

son válidas.

El símbolo 0 utilizado antes se usa también para designar el elemento neutro para la suma del cuerpo de escalares.

Un *espacio vectorial real* es un espacio vectorial sobre $\Phi = R$; un *espacio vectorial complejo* es un espacio vectorial sobre $\Phi = \mathbb{C}$. Debe de sobreentenderse que todo aserto sobre espacios vectoriales en el que no se mencione explícitamente el cuerpo de escalares es aplicable en cada uno de estos dos casos.

Si X es un espacio vectorial, $A \subset X$, $B \subset X$, $x \in X$ y $\lambda \in \Phi$, usamos las siguientes notaciones:

$$x + A = \{x + a: a \in A\},$$
$$x - A = \{x - a: a \in A\},$$
$$A + B = \{a + b: a \in A, \ b \in B\},$$
$$\lambda A = \{\lambda a: a \in A\}.$$

En particular (tomando $\lambda = -1$), $-A$ designa el conjunto de los opuestos de los elementos de A.

Una advertencia: Con estos convenios, puede ocurrir que $2A \neq A + A$ (ejercicio 1).

Se dice que un subconjunto $Y \subset X$ es un *subespacio* de X, si Y es también un espacio vectorial (respecto de las mismas operaciones de X). Se comprueba fácilmente que esto ocurre, si y sólo si, $0 \in Y$ y

$$\alpha Y + \beta Y \subset Y$$

para todo par de escalares α y β.

Se dice que un conjunto $C \subset X$ es *convexo* si

$$tC + (1 - t)C \subset C \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Con otras palabras, se exige que C contenga a $tx + (1 - t)y$ si $x \in C$, $y \in C$, y $0 \leq t \leq 1$.

Se dice que un conjunto $B \subset X$ es *equilibrado* si $\alpha B \subset B$ para todo $\alpha \in \Phi$ tal que $|\alpha| \leq 1$.

Un espacio vectorial X tiene *dimensión* n ($\dim X = n$) si X tiene una *base* $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Esto quiere decir que cada $x \in X$ tiene una única representación de la forma

$$x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \qquad (\alpha_i \in \Phi).$$

Si $\dim X = n$ para algún n, se dice que X tiene *dimensión finita.* Si $X = \{0\}$, entonces $\dim X = 0$.

Ejemplo Si $X = \mathbb{C}$ (espacio vectorial de dimensión 1 sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{C}$), los conjuntos equilibrados son: $\mathbb{C}$, el conjunto vacío $\varnothing$ y toda bola (abierta o cerrada) centrada en 0. Si $X = R^2$ (espacio vectorial de dimensión dos sobre el cuerpo de escalares R), existen muchos más conjuntos equilibrados; todo segmento cuyo punto medio sea (0, 0) lo es. Desde este punto de vista y a pesar de la conocida y obvia identificación de $\mathbb{C}$ con R^2, estos espacios son completamente diferentes en cuanto concierne a su estructura de espacio vectorial.

1.5 Espacios topológicos. Un *espacio topológico* es un conjunto S en el que se ha elegido una colección τ de subconjuntos (llamados *conjuntos abiertos*) con las siguientes propiedades: S es abierto, $\varnothing$ es abierto, la intersección de dos abiertos cualesquiera es un abierto y la unión de cualquier colección de abiertos es un abierto. Se dice que una tal colección τ es una *topología sobre* S. Para poner de manifiesto que el espacio topológico es el correspondiente a la topología τ escribiremos (S, τ) en lugar de S.

He aquí un resumen del vocabulario usual que utilizaremos, si (S, τ) es un espacio topológico.

Un conjunto $E \subset S$ es *cerrado* si, y sólo si, su complementario es abierto. La *adherencia* $\bar{E}$ de E es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen E. El *interior* E° de E es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en E. Un *entorno* de un punto $p \in S$ es un conjunto abierto que contiene p. (S, τ) es un *espacio de Hausdorff*, y τ es una *topología de Hausdorff*, cuando puntos distintos de S tienen entornos disjuntos. Un conjunto $K \subset S$ es *compacto* si todo recubrimiento abierto de K contiene un subrecubrimiento finito. Una colección $\tau' \subset \tau$ es una *base* para τ, si cada elemento de τ (es decir, cada conjunto abierto) es unión de elementos de τ'. Una colección γ de entornos de un punto $p \in S$ es una *base local en* p si todo entorno de p contiene un elemento de γ.

Si $E \subset S$ y σ es la colección de todas las intersecciones $E \cap V$, con $V \in \tau$, entonces σ es una topología sobre E como puede comprobarse fácilmente, y se dice que esta topología es la *heredada* por E de S.

Si una topología τ está inducida por una métrica d (ver sección 1.2) diremos que d y τ son *compatibles* entre sí.

Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio de Hausdorff *converge* a un punto $x \in X$ (o bien: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$), si cada entorno de x contiene los puntos x_n salvo quizás un número finito de ellos.

1.6 Espacios vectoriales topológicos. Sea τ una topología sobre un espacio vectorial X tal que

(*a*) *cada punto de X es un conjunto cerrado, y*
(*b*) *las operaciones de espacio vectorial son continuas respecto de* τ.

En estas condiciones, se dice que τ es una *topología vectorial* sobre X y que X es un *espacio vectorial topológico.*

He aquí una formulación más precisa de la condición (*a*): para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ que tiene a x como único elemento es un conjunto cerrado.

En algunos textos se omite la condición (*a*) en la definición de espacio vectorial topológico. Como (*a*) se satisface en casi todas las aplicaciones y la mayoría de los teoremas interesantes exigen (*a*) en sus hipótesis, la hemos incluido en los axiomas. [El teorema 1.12 probará que (*a*) y (*b*) juntas implican que τ es una topología de Hausdorff.]

Decir que la suma es *continua* significa, por definición, que la aplicación

$$(x, y) \to x + y$$

del producto cartesiano $X \times X$ en X es continua: si $x_i \in X$ para $i = 1, 2$, y si V es un entorno de $x_1 + x_2$, existen entornos V_i de x_i tales que

$$V_1 + V_2 \subset V.$$

Análogamente, la hipótesis de que la multiplicación por escalares es continua significa que la aplicación

$$(\alpha, x) \to \alpha x$$

de $\Phi \times X$ en X es continua: si $x \in X$, α es un escalar y V es un entorno de αx, entonces para algún $r > 0$ y algún entorno W, de x se verifica $\beta W \subset V$ cuando $|\beta - \alpha| < r$.

Se dice que un subconjunto E de un espacio vectorial topológico es *acotado* si para cada entorno V de 0 en X, se puede encontrar un número $s > 0$ tal que $E \subset tV$, para todo $t > s$.

1.7 Invariancia. Sea X un espacio vectorial topológico. A cada $a \in X$ y a cada escalar $\lambda \neq 0$ hacemos corresponder el *operador traslación* T_a y el *operador multiplicación* M_λ, por las fórmulas

$$T_a(x) = a + x, \qquad M_\lambda(x) = \lambda x \qquad (x \in X).$$

La siguiente proposición es muy importante:

Proposición. *T_a y M_λ son homeomorfismos de X sobre X.*

DEMOSTRACIÓN. Los axiomas de espacio vectorial implican que T_a y M_λ son aplicaciones biyectivas de X sobre X y que sus inversas son T_{-a} y $M_{1/\lambda}$, respectivamente. La hipótesis de continuidad de las operaciones del espacio vectorial implica que estas cuatro aplicaciones son continuas. Por tanto, cada una de ellas es un homeomorfismo (una aplicación continua cuya inversa es también continua).

Una consecuencia de esta proposición es que toda topología vectorial τ es *invariante por traslaciones* (o simplemente *invariante*, por brevedad): Un conjunto $E \subset X$ es abierto si, y sólo si, cada uno de sus trasladados $a + E$ es abierto. Entonces τ queda completamente determinada por una base local.

En el espacio vectorial correspondiente, el término *base local* significará siempre una base local en 0. Una base local de un espacio vectorial topológico X es, por tanto, una colección $\mathscr{B}$ de entornos de 0 tal que cada entorno de 0 contiene un elemento de $\mathscr{B}$. Los conjuntos abiertos de X son entonces precisamente los que se obtienen como uniones de trasladados de elementos de $\mathscr{B}$.

Diremos que una métrica d sobre un espacio vectorial X es *invariante*, si

$$d(x + z, y + z) = d(x, y)$$

para cualesquiera x, y, z de X.

1.8 Tipos de espacios vectoriales topológicos. En las definiciones siguientes, X denota siempre un espacio vectorial topológico, con topología τ.

(*a*) X es *localmente convexo* si existe una base local $\mathscr{B}$ cuyos elementos son convexos.

(*b*) X es *localmente acotado* si 0 tiene un entorno acotado.

(*c*) X es *localmente compacto* si 0 tiene un entorno cuya adherencia es compacta.

(*d*) X es *metrizable* si τ es compatible con alguna métrica d.

(*e*) X es un *F-espacio* si su topología τ está inducida por una métrica d invariante y completa. (Comparar con la sección 1.25.)

(*f*) X es un *espacio de Fréchet* si X es un F-espacio localmente convexo.

(*g*) X es *normable* si existe una norma sobre X tal que la métrica inducida por esta norma es compatible con τ.

(*h*) Los *espacios normados* y los *espacios de Banach* ya han sido definidos (sección 1.2).

(*i*) X tiene la *propiedad de Heine-Borel* si todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto.

La terminología de (*e*) y (*f*) no está aceptada universalmente. En algunos textos, se omite la convexidad local en la definición de espacio de Fréchet, mientras que otros utilizan los F-espacios para describir lo que nosotros hemos llamado espacio de Fréchet.

1.9 He aquí una lista de algunas relaciones entre estas propiedades de un espacio vectorial topológico X.

(*a*) Si X es localmente acotado, entonces X tiene una base local numerable [parte (*c*) del teorema 1.15].

(*b*) X es metrizable si, y sólo si, X tiene una base local numerable (teorema 1.24).

(*c*) X es normable si, y sólo si, X es localmente convexo y localmente acotado (teorema 1.39).

(*d*) X tiene dimensión finita si, y sólo si, X es localmente compacto (teoremas 1.21, 1.22).

(*e*) Si un espacio localmente acotado X tiene la propiedad de Heine-Borel, entonces X tiene dimensión finita (teorema 1.23).

Los espacios $H(\Omega)$ y C_K^∞ mencionados en la sección 1.3 son espacios de Fréchet de dimensión infinita con la propiedad de Heine-Borel (secciones 1.45, 1.46). Por consiguiente, no son localmente acotados y tampoco son normables. Esto prueba también que la recíproca de (*a*) es falsa.

Por otra parte, existen F-espacios localmente acotados que no son localmente convexos (sección 1.47).

Propiedades de separación

1.10 Teorema. *Sean K y C dos subconjuntos de un espacio vectorial topoló-*

gico X tales que K es compacto, C es cerrado y $K \cap C = \varnothing$. Entonces 0 *tiene un entorno V tal que*

$$(K + V) \cap (C + V) = \varnothing.$$

Observemos que $K + V$ es unión de los trasladados $x + V$ de V ($x \in K$). Entonces $K + V$ es un conjunto abierto que contiene K. Por tanto, el teorema implica la existencia de conjuntos abiertos disjuntos que contienen K y C, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Empezamos con la siguiente proposición, que utilizaremos también en otras partes:

Si W es un entorno de 0 *en X, entonces existe un entorno U de* 0 *que es simétrico (en el sentido de que $U = -U$) y satisface $U + U \subset W$.*

Para ver esto, observemos que $0 + 0 = 0$, que la suma es continua y que por tanto, existen entornos de 0, V_1, V_2 tales que $V_1 + V_2 \subset W$. Si

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

entonces U tiene las propiedades requeridas.

Puede aplicarse ahora la proposición a U en lugar de W y obtener un nuevo entorno simétrico de 0 tal que

$$U + U + U + U \subset W.$$

Es claro que este proceso puede continuarse.

Si $K = \varnothing$, entonces $K + V = \varnothing$ y la conclusión del teorema es obvia. Supongamos entonces que $K \neq \varnothing$ y consideremos un punto $x \in K$. Como C es cerrado, x no pertenece a C y la topología de X es invariante por traslaciones, la proposición anterior prueba que 0 tiene un entorno simétrico V_x tal que $x + V_x + V_x + V_x$ no corta a C. La simetría de V_x prueba entonces que

$$(1) \qquad (x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \varnothing.$$

Como K es compacto, existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n$ de K tales que

$$K \subset (x_1 + V_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Pongamos $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Entonces

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}),$$

y ningún término de esta última unión corta a $C + V$, por (1). Esto completa la demostración.

Como $C + V$ es abierto, es igualmente cierto que la *adherencia* de $K + V$ no corta a $C + V$; en particular, la adherencia de $K + V$ no corta a C. El siguiente caso especial de éste, obtenido tomando $K = \{0\}$, es de considerable interés.

1.11 Teorema. *Si $\mathscr{B}$ es una base local para un espacio vectorial topológico X*

entonces cada elemento de $\mathscr{B}$ contiene la adherencia de algún elemento de $\mathscr{B}$.

Hasta ahora no hemos usado la hipótesis de que cada punto de X es un conjunto cerrado. Usémosla y apliquemos el teorema 1.10 a un par de puntos distintos en lugar de K y C. La conclusión es que estos puntos poseen entornos disjuntos. Con otras palabras, se verifica el axioma de separación de Hausdorff:

1.12 Teorema. *Todo espacio vectorial topológico es un espacio de Hausdorff.*

Deduciremos ahora algunas propiedades sencillas de las adherencias e interiores en un espacio vectorial topológico. Véase la sección 1.5 para las notaciones $\overline{E}$ y E°. Obsérvese que un punto p pertenece a $\overline{E}$ si,y sólo si,cada entorno de p corta a E.

1.13 Teorema. *Sea X un espacio vectorial topológico.*

(*a*) *Si $A \subset X$, entonces $\overline{A} = \bigcap (A + V)$, donde V recorre el conjunto de todos los entornos de* 0.

(*b*) *Si $A \subset X$ y $B \subset X$, entonces $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.*

(*c*) *Si Y es un subespacio de X, también lo es $\overline{Y}$.*

(*d*) *Si C es un subconjunto convexo de X, también lo son $\overline{C}$ y C°.*

(*e*) *Si B es un subconjunto equilibrado de X, también lo es $\overline{B}$; si también $0 \in B^\circ$ entonces B° es equilibrado.*

(*f*) *Si E es un subconjunto acotado de X, también lo es $\overline{E}$.*

DEMOSTRACION. (*a*) $x \in \overline{A}$ si,y sólo si,$(x + V) \cap A \neq \varnothing$ para todo entorno V de 0, y esto ocurre si,y sólo si,$x \in A - V$ para cada entorno V. Como $-V$ es un entorno de 0 si,y sólo si,lo es V, la demostración está completa.

(*b*) Tomemos $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$; sea W un entorno de $a + b$. Existen entornos W_1 y W_2 de a y b tales que $W_1 + W_2 \subset W$. También existen $x \in A \cap W_1$ e $y \in B \cap W_2$, ya que $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$. Entonces $x + y$ pertenece a $(A + B) \cap W$, luego esta intersección es no vacía. Por consiguiente, $a + b \in \overline{A + B}$.

(*c*) Sean α y β dos escalares. Por la proposición de la sección 1.7, $\alpha\overline{Y} = \overline{\alpha Y}$ si $\alpha \neq 0$; si $\alpha = 0$, estos dos conjuntos son evidentemente iguales. De (*b*) se sigue que

$$\alpha\overline{Y} + \beta\overline{Y} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y};$$

la hipótesis de que Y es un subespacio se usa en la última inclusión.

Las demostraciones de que los conjuntos convexos tienen adherencias convexas y que los conjuntos equilibrados tienen adherencias equilibradas son análogas a esta demostración de (*c*) y las omitiremos en (*d*) y (*e*).

(*d*) Como $C^\circ \subset C$ y C es convexo, se tiene

$$tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset C$$

si $0 < t < 1$. Los dos conjuntos de la izquierda son abiertos; por tanto, también lo es su suma. Como cada subconjunto abierto de C es un subconjunto de C°, se deduce que C° es convexo.

(*e*) Si $0 < |\alpha| \leq 1$, entonces $\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ$, ya que $x \to \alpha x$ es un homeomorfismo. Por tanto, $\alpha B^\circ \subset \alpha B \subset B$, porque B es equilibrado. Pero αB° es abierto, luego $\alpha B^\circ \subset B^\circ$. Si B° contiene el origen, entonces $\alpha B^\circ \subset B^\circ$ es válida incluso para $\alpha = 0$.

(f) Sea V un entorno de 0. Por el teorema 1.11, $\overline{W} \subset V$ para algún entorno W de 0. Como E es acotado, $E \subset tW$ para todo t suficientemente grande. Para estos t, se tiene $\overline{E} \subset t\overline{W} \subset tV$.

1.14 Teorema. *En un espacio vectorial topológico X,*
(a) *todo entorno de* 0 *contiene un entorno equilibrado de* 0, *y*
(b) *todo entorno convexo de* 0 *contiene un entorno convexo y equilibrado de* 0.

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea U un entorno de 0 en X. Como la multiplicación por escalares es continua, existen un $\delta > 0$ y un entorno V de 0 en X tales que $\alpha V \subset U$ siempre que $|\alpha| < \delta$. Sea W la unión de todos estos conjuntos αV. Entonces W es un entorno de 0, W es equilibrado y $W \subset U$.

(b) Sea U un entorno convexo de 0 en X. Sea $A = \bigcap \alpha U$, donde α recorre el conjunto de los escalares de valor absoluto 1. Elijamos W como en la parte (a). Como W es equilibrado, $\alpha^{-1} W = W$ cuando $|\alpha| = 1$, por tanto $W \subset \alpha U$. Entonces $W \subset A$, lo que implica que el interior A° de A es un entorno de 0. Evidentemente $A^\circ \subset U$. Por ser una intersección de conjuntos convexos, A es convexo, luego también lo es A°. Para probar que A° es un entorno con las propiedades deseadas, hemos de probar que A° es equilibrado; para ello es suficiente probar que A es equilibrado. Elijamos r y β tales que $0 \leq r \leq 1$, $|\beta| = 1$. Entonces

$$r\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U.$$

Como αU es un conjunto convexo que contiene a 0, se tiene $r\alpha U \subset \alpha U$. Entonces $r\beta A \subset A$, lo que completa la demostración.

El teorema 1.14 puede enunciarse en términos de bases locales. Se dice que una base local $\mathscr{B}$ es *equilibrada* si sus elementos son conjuntos equilibrados, y que $\mathscr{B}$ es *convexa* si sus elementos son conjuntos convexos.

Corolario

(a) *Todo espacio vectorial topológico tiene una base local equilibrada.*
(b) *Todo espacio localmente convexo tiene una base local convexa y equilibrada.*

Observemos también que el teorema 1.11 se verifica para cada una de estas bases locales.

1.15 Teorema. *Sea V un entorno de* 0 *en un espacio vectorial topológico X.*
(a) *Si $0 < r_1 < r_2 < \ldots$ y $r_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

(*b*) *Todo subconjunto compacto K de X es acotado.*

(*c*) *Si* $\delta_1 > \delta_2 > \ldots$ y $\delta_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$, *y si* V *es acotado, entonces la colección*

$$\{\delta_n V: n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

es una base local para X.

Demostración. (*a*) Fijemos $x \in X$. Como $\alpha \to \alpha x$ es una aplicación continua del cuerpo de escalares en X, el conjunto de todos los α tales que $\alpha x \in V$ es abierto, contiene a 0, luego contiene $1/r_n$ para todo n suficientemente grande. Entonces $(1/r_n)x \in V$, es decir, $x \in r_n V$, para n suficientemente grande.

(*b*) Sea W un entorno equilibrado de 0 tal que $W \subset V$. Por (*a*),

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nW.$$

Como K es compacto, existen enteros $n_1 < \ldots < n_s$ tales que

$$K \subset n_1 W \cup \cdots \cup n_s W = n_s W.$$

La igualdad es válida debido a que W es equilibrado. Si $t > n_s$, se deduce que $K \subset tW \subset tV$.

(*c*) Sea U un entorno de 0 en X. Si V es acotado, existe $s > 0$ tal que $V \subset tU$ para todo $t > s$. Si n es suficientemente grande para que $s\delta_n < 1$, se deduce que $V \subset (1/\delta_n)U$. Por tanto, U contiene todos los conjuntos $\delta_n V$ excepto un número finito de ellos.

Aplicaciones lineales

1.16 Definiciones. Si X e Y son conjuntos, el símbolo

$$f: X \to Y$$

denotará que f es una aplicación de X en Y. Si $A \subset X$ y $B \subset Y$, la *imagen* $f(A)$ de A y la *imagen inversa* o *antiimagen* $f^{-1}(B)$ de B están definidas por

$$f(A) = \{f(x): x \in A\}, \qquad f^{-1}(B) = \{x: f(x) \in B\}.$$

Supongamos ahora que X e Y son espacios vectoriales *sobre el mismo cuerpo de escalares*. Una aplicación $\Lambda : X \to Y$ se dice *lineal* si

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y$$

para cualesquiera x e y de X y todo par de escalares α y β. Observemos que frecuentemente se escribe Λx, en lugar de $\Lambda(x)$, cuando Λ es lineal.

Las aplicaciones lineales de X en el cuerpo de escalares se llaman *formas lineales*.

Por ejemplo, los operadores multiplicación M_a de la sección 1.7 son lineales, pero los operadores traslación T_a no lo son, excepto cuando $a = 0$.

He aquí algunas propiedades de las aplicaciones lineales $\Lambda : X \to Y$ cuyas demostraciones son tan sencillas que las omitiremos. Se supone que $A \subset X$ y $B \subset Y$:

(*a*) $\Lambda 0 = 0$.

(*b*) Si A es un subespacio (o un conjunto convexo, o un conjunto equilibrado) también lo es $\Lambda(A)$.

(*c*) Si B es un subespacio (o un conjunto convexo, o un conjunto equilibrado), también lo es $\Lambda^{-1}(B)$.

(*d*) En particular, el conjunto

$$\Lambda^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : \Lambda x = 0\} = \mathscr{N}(\Lambda)$$

es un subespacio de X que se llama *núcleo* de Λ.

Veamos ahora las propiedades de continuidad de las aplicaciones lineales.

1.17 Teorema *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos. Si $\Lambda : X \to Y$ es lineal y continua en 0, entonces Λ es continua. De hecho, Λ es uniformemente continua en el siguiente sentido: Para cada entorno W de 0 en Y existe un entorno V de 0 en X tal que*

$$y - x \in V \quad \textit{implica} \quad \Lambda y - \Lambda x \in W.$$

DEMOSTRACIÓN. Elegido W, la continuidad de Λ en 0 prueba que $\Lambda V \subset W$ para algún entorno V de 0. Si ahora $y - x \in V$, la linealidad de Λ prueba que $\Lambda y - \Lambda x = \Lambda(y - x) \in W$. Entonces Λ aplica el entorno $x + V$ de x en el entorno prefijado $\Lambda x + W$ de Λx, lo que nos dice que Λ es continua en x.

1.18 Teorema. *Sea Λ una forma lineal sobre un espacio vectorial topológico X. Supongamos que $\Lambda x \neq 0$ para algún $x \in X$. Entonces cada una de las cuatro propiedades siguientes implica las otras tres:*

(*a*) *Λ es continua.*

(*b*) *El núcleo $\mathscr{N}(\Lambda)$ es cerrado.*

(*c*) *$\mathscr{N}(\Lambda)$ no es denso en X.*

(*d*) *Λ es acotada en algún entorno V de 0.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathscr{N}(\Lambda) = \Lambda^{-1}(\{0\})$ y $\{0\}$ es un subconjunto cerrado del cuerpo de escalares Φ, (*a*) implica (*b*). Por hipótesis, $\mathscr{N}(\Lambda) \neq X$. Por tanto, (*b*) implica (*c*).

Supongamos que se verifica (*c*); es decir, supongamos que el complementario de $\mathscr{N}(\Lambda)$ tiene interior no vacío. Por el teorema 1.14,

(1) $(x + V) \cap \mathscr{N}(\Lambda) = \varnothing$

para algún $x \in X$ y algún entorno equilibrado V de 0. Luego ΛV es un subconjunto equilibrado del cuerpo Φ. Entonces, bien ΛV es acotado, en cuyo caso se verifica (*d*), o bien $\Lambda V = \Phi$. En este último caso, existe $y \in V$ tal que $\Lambda y = -\Lambda x$, y por tanto $x + y \in \mathscr{N}(\Lambda)$, en contradicción con (1). Por consiguiente, (*c*) implica (*d*).

Finalmente, si se verifica (*d*), entonces $|\Lambda x| < M$ para todo x de V y algún $M < \infty$. Si $r > 0$ y $W = (r/M)V$, entonces $|\Lambda x| < r$ para todo x de W. Por tanto, Λ es continua en el origen. Por el teorema 1.17, esto implica (*a*).

Espacios de dimensión finita

1.19 Entre los espacios de Banach más sencillos están R^n y $\mathbb{C}^n$, espacios vectoriales de dimensión n sobre R y $\mathbb{C}$, respectivamente, normados por medio de la métrica euclídea usual: Si, por ejemplo,

$$z = (z_1, \dots, z_n) \qquad (z_i \in \mathbb{C})$$

es un vector de $\mathbb{C}^n$. entonces

$$\|z\| = (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{1/2}.$$

Se pueden definir otras normas sobre $\mathbb{C}^n$. Por ejemplo,

$$\|z\| = |z_1| + \cdots + |z_n| \qquad \text{o} \qquad \|z\| = \max(|z_i| : 1 \leq i \leq n).$$

Estas normas corresponden, por supuesto, a diferentes métricas sobre $\mathbb{C}^n$ (con $n > 1$) pero se puede ver fácilmente que todas ellas inducen la misma topología sobre $\mathbb{C}^n$. Más aún:

Si X es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$, y $\dim X = n$, entonces cada base de X induce un isomorfismo de X sobre $\mathbb{C}^n$. El teorema 1.21 probará que este *isomorfismo ha de ser un homeomorfismo.* Con otras palabras, esto nos dice que *la topología de $\mathbb{C}^n$ es la única topología vectorial que puede tener un espacio vectorial topológico complejo de dimensión n.*

Veremos también que los subespacios de dimensión finita son siempre cerrados.

Cada afirmación hecha en la discusión anterior permanece válida para escalares reales en lugar de complejos.

Empezamos con un lema que después queda superado por los teoremas 1.21 y 1.22.

1.20 Lema. *Sea Y un subespacio de un espacio vectorial topológico X y supongamos que Y es localmente compacto en la topología heredada de X. Entonces Y es un subespacio cerrado de X.*

DEMOSTRACIÓN. Existe un conjunto compacto $K \subset Y$ cuyo interior (relativo a Y) contiene 0. Por tanto, existe un entorno U de 0 en X tal que $U \cap Y \subset K$. Elijamos un entorno simétrico V de 0 en X tal que $\overline{V} + \overline{V} \subset U$. Podemos afirmar que el conjunto

$$(1) \qquad Y \cap (x + \overline{V})$$

es compacto, para cada $x \in X$.

Para ver esto, fijemos y_0 en (1). Para cada y de (1),

$$y - y_0 = (y - x) + (x - y_0) \in \overline{V} + \overline{V} \subset U.$$

También $y - y_0 \in Y$, ya que Y es un subespacio. Entonces:

$$y - y_0 \in U \cap Y \subset K,$$

lo que implica que (1) está contenido en el conjunto compacto $y_0 + K$. Pero (1) es también un subconjunto cerrado de Y, ya que $x + \overline{V}$ es cerrado en X e Y hereda su topología de X. Entonces (1) es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto y, por consiguiente, es compacto.

Fijemos ahora $x \in \overline{Y}$. Sea $\mathscr{B}$ la colección de todos los conjuntos abiertos W de X tales que $0 \in W$ y $W \subset V$, y asociemos a cada $W \in \mathscr{B}$ el conjunto

$$E_W = Y \cap (x + \overline{W}).$$

Como $W \subset V$, cada E_W es compacto, y siendo $x \in \overline{Y}$, ningún E_W es vacío. Como toda intersección finita de elementos de $\mathscr{B}$ pertenece a $\mathscr{B}$, se deduce que $\{E_W : W \in \mathscr{B}\}$ es una colección de conjuntos compactos con la propiedad de intersección finita. Por consiguiente, existe un $z \in \bigcap E_W$. Este z pertenece a Y. Por otra parte, $z \in x + \overline{W}$ para cada $W \in \mathscr{B}$. Entonces $z = x$ (teorema 1.12), y por tanto $x \in Y$. Esto prueba que $Y = \overline{Y}$, luego Y es cerrado.

1.21 Teorema. *Sean X un espacio vectorial topológico complejo, Y un subespacio de X, n un entero positivo y* dim $Y = n$. *Entonces*

(*a*) *todo isomorfismo de $\mathbb{C}^n$ sobre Y es un homeomorfismo, y*

(*b*) *Y es cerrado.*

El término «homeomorfismo» se refiere, por supuesto, a la topología euclídea de $\mathbb{C}^n$ por un lado, y a la topología que Y hereda de X por otro. Como $\mathbb{C}^n$ es localmente compacto, el lema 1.20 prueba que (*b*) se deduce de (*a*). La demostración que sigue da también el teorema análogo con escalares reales en lugar de complejos.

Demostración. Sea P_n el aserto del enunciado. Vamos a probar P_1. Sea $\Lambda : \mathbb{C} \to Y$ un isomorfismo (es decir, una aplicación lineal uno-uno de $\mathbb{C}^n$ sobre Y). Pongamos $u = \Lambda 1$. Entonces $\Lambda\alpha = \alpha u$. La continuidad de las operaciones de espacio vectorial de Y implica que Λ es continua. Observemos que Λ^{-1} es una forma lineal sobre Y con núcleo $\{0\}$, conjunto cerrado. Por el teorema 1.18, Λ^{-1} es continua. Esto prueba P_1.

Supongamos ahora que $n > 1$ y que se verifica P_{n-1}. Sea $\Lambda : \mathbb{C} \to Y$ un isomorfismo. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathbb{C}^n$, en la que la k-ésima coordenada de e_k es 1 y las demás son 0. Pongamos $u_k = \Lambda e_k$, para $k = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n,$$

y la continuidad de las operaciones de espacio vectorial en Y implica de nuevo que Λ es continua. Como Λ es un isomorfismo, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de Y. Por tanto, existen formas lineales $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sobre Y tales que cada $x \in Y$ tiene una única representación en la forma

$$x = \gamma_1(x)u_1 + \cdots + \gamma_n(x)u_n.$$

Cada γ_i tiene un núcleo en Y, de dimensión $n - 1$, que es *cerrado* en Y, por la supuesta validez de P_{n-1}. Entonces γ_i es continua, por el teorema 1.18. Como

$$\Lambda^{-1}x = (\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x)) \qquad (x \in Y),$$

se deduce que Λ^{-1} es continua. Por consiguiente, se verifica P_n, y la demostración es completa.

1.22 Teorema. *Todo espacio vectorial topològico localmente compacto X tiene dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN. El origen de X tiene un entorno V cuya adherencia es compacta. Por el teorema 1.15, V es acotado, y los conjuntos $2^{-n}V (n = 1, 2, 3, \ldots)$ forman una base local para X.

La compacidad de $\overline{V}$ prueba que existen $x_1, \ldots x_m$, en X tales que

$$\overline{V} \subset (x_1 + \tfrac{1}{2}V) \cup \cdots \cup (x_m + \tfrac{1}{2}V).$$

Sea Y el espacio vectorial engendrado a partir de $x_1, \ldots, x_m$. Entonces dim $Y \leq$ m. Por el teorema 1.21, Y es un subespacio *cerrado* de X.

Como $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ y $\lambda Y = Y$ para cada escalar $\lambda \neq 0$, se deduce

$$\tfrac{1}{2}V \subset Y + \tfrac{1}{4}V$$

y, por tanto,

$$V \subset Y + \tfrac{1}{2}V \subset Y + Y + \tfrac{1}{4}V = Y + \tfrac{1}{4}V.$$

Continuando este proceso, se prueba

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + 2^{-n}V).$$

Como $\{2^{-n}V\}$ es una base local, de la parte (*a*) del teorema 1.13 se sigue que $V \subset \overline{Y}$. Pero $\overline{Y} = Y$. Entonces $V \subset Y$, lo que implica que $kV \subset Y$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces $Y = X$ en virtud de la parte (*a*) del teorema 1.15 y en consecuencia, dim $X \leq m$.

1.23 Teorema. *Si X es un espacio vectorial topológico localmente acotado con la propiedad de Heine-Borel, entonces X tiene dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, el origen de X tiene un entorno acotado V. El aserto (*f*) del teorema 1.13 prueba que $\overline{V}$ es también acotado. Entonces $\overline{V}$ es compacto, por la propiedad de Heine-Borel. Esto nos dice que X es localmente compacto, luego tiene dimensión finita en virtud del teorema 1.22.

Metrizabilidad

Recordemos que una topología τ sobre un conjunto X se dice *metrizable* si existe una métrica d sobre X que es compatible con τ. En este caso, las bolas de centro x y radios $1/n$ forman una base local en x. Esto da una condición necesaria para la metrizabilidad que, para espacios vectoriales topológicos, es también suficiente.

1.24 Teorema. *Si X es un espacio vectorial topológico con una base local numerable, entonces existe una métrica d sobre X tal que*

(*a*) *d es compatible con la topología de X.*

(*b*) *las bolas abiertas centradas en 0 son equilibradas, y*

(*c*) *d es invariante: $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ para $x, y, z \in X$.*

Si, además, X es localmente convexo, entonces se puede elegir d verificando (*a*), (*b*), (*c*) *y también*

(*d*) *todas las bolas abiertas son convexas.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 1.14, X tiene una base local equilibrada $\{V_n\}$ tal que

(1) $$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

cuando X sea localmente convexo, esta base local puede elegirse de manera que cada V_n sea convexo.

Sea D el conjunto de todos los números racionales r de la forma

(2) $$r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r)2^{-n},$$

donde cada uno de los «dígitos» $c_i(r)$ es 0 ó 1 y sólo un número finito de ellos son 1. Entonces cada $r \in D$ satisface las desigualdades $0 \leq r < 1$.

Pongamos $A(r) = X$ si $r \geq 1$; para cada $r \in D$ definamos

(3) $$A(r) = c_1(r)V_1 + c_2(r)V_2 + c_3(r)V_3 + \cdots.$$

Observemos que cada una de estas sumas, es en realidad, finita. Definamos

(4) $$f(x) = \inf\{r : x \in A(r)\} \qquad (x \in X)$$

y

(5) $$d(x, y) = f(x - y) \qquad (x \in X, y \in X).$$

La demostración de que d tiene las propiedades deseadas depende de las inclusiones

(6) $$A(r) + A(s) \subset A(r + s) \qquad (r \in D, s \in D).$$

Antes de probar (6), veamos cómo de esta inclusión se sigue el teorema. Como cada $A(s)$ contiene 0, (6) implica

(7) $$A(r) \subset A(r) + A(t - r) \subset A(t) \qquad \text{si} \qquad r < t.$$

Entonces $\{A(r)\}$ está totalmente ordenada por inclusión. Queremos probar que es

(8) $$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \qquad (x \in X, y \in X).$$

En la demostración de (8) podemos, de hecho, suponer que el segundo miembro es < 1. Fijemos $\varepsilon > 0$. Entonces existen r y s en D tales que

$$f(x) < r, \qquad f(y) < s, \qquad r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon.$$

Entonces $x \in A(r)$, $y \in A(s)$ y (6) implica $x + y \in A(r + s)$. Ahora se deduce (8), y que

$$f(x+y) \leq r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon,$$

y ε es arbitrario.

Como cada $A(r)$ es equilibrado, $f(x) = f(-x)$. Es obvio que $f(0) = 0$. Si $x \neq 0$, entonces $x \notin V_n = A(2^{-n})$ para algún n y, por tanto, $f(x) \geq 2^{-n} > 0$.

Estas propiedades de f prueban que (5) define una métrica d sobre X invariante por traslaciones. Las bolas abiertas centradas en 0 son los conjuntos abiertos

(9) $$B_\delta(0) = \{x : f(x) < \delta\} = \bigcup_{r<\delta} A(r).$$

Si $\delta < 2^{-n}$, entonces $B_\delta(0) \subset V_n$. Por tanto, $\{B_\delta(0)\}$ es una base local para la topología de X. Esto prueba (*a*). Como cada $A(r)$ es equilibrado, también lo es cada $B_\delta(0)$. Si cada V_n es convexo, también lo es cada $A(r)$, y (7) implica que esto mismo es válido para cada $B_\delta(0)$, luego también, para cada trasladado de $B_\delta(0)$.

Probaremos (6) por inducción. Sea P_N el aserto:
Si $r + s < 1$ y $c_n(r) = c_n(s) = 0$ para todo $n > N$, entonces

(10) $$A(r) + A(s) \subset A(r+s).$$

Inmediatamente se comprueba que P_1 es válida. Supongamos cierta P_{N-1} para algún $N > 1$. Elijamos $r \in D$, $s \in D$ de modo que $r + s < 1$ y $c_n(r) = c_n(s) = 0$ si $n > N$ y definamos r' y s' por

(11) $$r = r' + c_N(r)2^{-N}, \qquad s = s' + c_N(s)2^{-N}.$$

Entonces

(12) $$A(r) = A(r') + c_N(r)V_N, \qquad A(s) = A(s') + c_N(s)V_N.$$

Por P_{N-1} es, $A(r_1) + A(s') \subset A(r' + s')$. Por tanto.

(13) $$A(r) + A(s) \subset A(r' + s') + c_N(r)V_N + c_N(s)V_N.$$

Si $c_N(r) = c_N(s) = 0$, entonces $r = r'$, $s = s'$ y (13) da (10). Si $c_N(r) = 0$ y $c_N(s) = 1$, el segundo miembro de (13) es

$$A(r' + s') + V_N = A(r' + s' + 2^{-N}) = A(r + s),$$

y (10) se verifica de nuevo. El caso $c_N(r) = 1$, $c_N(s) = 0$ se trata de la misma manera. Si $c_N(r) = c_N(s) = 1$, el segundo miembro de (13) es

$$\begin{aligned} A(r' + s') + V_N + V_N &\subset A(r' + s') + V_{N-1} \\ &= A(r' + s') + A(2^{-N+1}) \subset A(r' + s' + 2^{-N+1}) = A(r + s). \end{aligned}$$

La última inclusión es válida en virtud de P_{N-1}.

Entonces P_{N-1} implica P_N. Por tanto, se verifica (6) y la demostración es completa.

1.25 Sucesiones de Cauchy. (*a*) Sea d una métrica sobre un conjunto X. Una sucesión $\{x_n\}$ en X es una *sucesión de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ cuando $m > N$ y $n > N$. Si toda sucesión de Cauchy en X converge a algún punto de X, entonces se dice que d es una métrica *completa* sobre X.

(*b*) Sea τ la topología de un espacio vectorial topológico X. El concepto de sucesión de Cauchy puede definirse en este marco sin hacer referencia a ninguna métrica: Fijemos una base local $\mathscr{B}$ para τ. Una sucesión $\{x_n\}$ en X se llama *sucesión de Cauchy* cuando para cada $V \in \mathscr{B}$ existe un N tal que $x_n - x_m \in V$ si $n > N$ y $m > N$.

Está claro que bases locales diferentes para la misma τ dan origen a la misma clase de sucesiones de Cauchy.

(*c*) Supongamos ahora que X es un espacio vectorial topológico cuya topología τ es compatible con una métrica *invariante* d. Usaremos temporalmente los términos d-sucesión de Cauchy y τ-sucesión de Cauchy para los conceptos definidos en (*a*) y (*b*), respectivamente. Como

$$d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0),$$

y como las d-bolas centradas en el origen forman una base local para τ, concluimos:

Una sucesión $\{x_n\}$ en X es una d-sucesión de Cauchy si y sólo si es una τ-sucesión de Cauchy.

En consecuencia, dos métricas invariantes sobre X compatibles con τ tienen las mismas sucesiones de Cauchy. También es obvio que ellas tienen las mismas sucesiones convergentes (a saber, las τ-sucesiones convergentes). Estas observaciones prueban el siguiente teorema:

1.26 Teorema. *Si d_1 y d_2 son métricas invariantes sobre un espacio vectorial X que inducen la misma topología sobre X, entonces*

(*a*) *d_1 y d_2 tienen las mismas sucesiones de Cauchy, y*

(*b*) *d_1 es completa si, y sólo si, d_2 es completa.*

La invariancia es necesaria en la hipótesis (ejercicio 12).

El siguiente teorema es análogo al lema 1.20, si se pone completitud en lugar de compacidad local. Observemos que las dos demostraciones son totalmente similares.

1.27 Teorema. *Sea Y un subespacio de un espacio vectorial topológico X y supongamos que Y es un F-espacio (para la topología heredada de X). Entonces Y es un subespacio cerrado de X.*