Lógica matemática

Lógica matemática

Carlos Fernando Mora Espinosa
Julio César Nieto Sánchez

UNIVERSIDAD CENTRAL
FACULTAD DE INGENIERÍA
Y CIENCIAS BÁSICAS
Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD CENTRAL

Esta es una publicación del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas.

Adolfo José Naranjo Parra
Decano

Fabián Sánchez Salazar
Director del Departamento de Matemáticas

ISBN (impreso): 978-958-26-0438-7
ISBN (PDF): 978-958-26-0439-4
Primera edición: 2019

Calle 21 n.º 5-84 (4.º piso). Bogotá, D. C., Colombia
PBX: 323 98 68, ext. 1556
editorial@ucentral.edu.co

Catalogación en la Publicación Universidad Central

Mora Espinosa, Carlos Fernando, autor.
Lógica matemática / Carlos Fernando Espinosa Mora, Julio César Nieto Sánchez -- Primera edición -- Bogotá : Ediciones Universidad Central, 2019.
244 páginas : ilustraciones ; 25 cm

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN: 978-958-26-0438-7 (impreso)
ISBN: 978-958-26-0439-4 (PDF)

1. Lógica simbólica y matemática 2. Teoría de conjuntos 3. Inferencia (Lógica) 4. Lógica de primer orden 5. Álgebra Booleana 6. Silogismo I. Nieto Sánchez, Julio César, autor II. Universidad Central. Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas. Departamento de Matemáticas.

511.3 – dc23 PTBUC/16-10-2019

Preparación editorial

Dirección:	Héctor Sanabria Rivera
Coordinación:	Nicolás Rojas Sierra
Diagramación:	Carlos Fernando Mora
Diseño de cubierta y finalización:	Mónica Cabiativa Daza
Corrección de textos:	Nicolás Rojas Sierra

Impreso en Colombia · *Printed in Colombia*

DEDICATORIA

La construcción del conocimiento matemático ha sido fruto del esfuerzo de muchos personajes a través de la historia. Actualmente, los matemáticos tienen la responsabilidad, ante la sociedad y el mundo científico, de interpretar dicha construcción, continuar aportando a ella y buscar contextos de aplicación de la teoría matemática. Los matemáticos que están en la academia, además, se ocupan de buscar nuevas estrategias que faciliten el aprendizaje de esta disciplina y se desvelan porque sus estudiantes se maravillen y disfruten de dicho aprendizaje.

La profesora **Edel Serrano Iglesias** *fue una matemática que cumplió a cabalidad con estas responsabilidades. Por su esfuerzo, disciplina, constancia y entereza, así como por sus aportes a esta obra, este libro está dedicado a ella.*

Índice general

Resumen

Este texto, surgido de la experiencia docente de sus autores, es un material de apoyo para el aprendizaje de la lógica matemática, atendiendo especialmente a las necesidades de los estudiantes de ingeniería. En este sentido, tiene como objetivos introducir herramientas y conceptos básicos de la lógica matemática y sus aplicaciones; formalizar correctamente; fortalecer la formación relacionada con los procedimientos formales y algorítmicos de razonamiento automático y resolución formal de problemas, y, con esto, incentivar al alumno a mejorar sus procesos de razonamiento.

El texto presentado está compuesto por nueve capítulos, cada uno orientado a una dimensión de la lógica matemática: teoría básica de conjuntos, la lógica y el razonamiento, sintaxis, semántica de proposiciones, inferencia lógica, lógica de primer orden, silogismos categóricos, métodos de demostración y álgebras de Boole.

El libro está diseñado para los cursos semestrales de lógica matemática que deben tomar los estudiantes de ingeniería. Los autores recibirán con agradecimiento todos los aportes, sugerencias y comentarios que se envíen a cmorae@ucentral.edu.co y jnietos@ucentral.edu.co.

Queremos agradecer a los estudiantes, colegas, correctores de estilo y otros lectores por sus aportes y correcciones, a la Universidad Central, y en especial a la profesora Edel Serrano Iglesias (q. e. p. d.).

Palabras clave: álgebras de Boole, curso de lógica matemática, inferencia lógica, razonamiento, resolución de problemas, semántica de proposiciones, sintaxis de proposiciones.

Cómo citar

APA: Mora, C. y Nieto, J. (2018). *Lógica matemática*. Bogotá: Ediciones Universidad Central.

MLA: Carlos Mora y Julio Nieto. *Lógica matemática*. Bogotá: Ediciones Universidad Central, 2018. Impreso.

CHICAGO PARENTÉTICO: Carlos Mora y Julio Nieto, 2018. *Lógica matemática*. Bogotá: Ediciones Universidad Central.

Los autores

Carlos Fernando Mora Espinosa

Magíster en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia (Bogotá) y matemático de la Universidad Nacional de Colombia (Bogotá). Docente de matemáticas en la Universidad Central y la Universidad Militar Nueva Granada. Autor del contenido académico del aula virtual de Lógica Matemática para los programas de pregrado de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas de la Universidad Central. Autor de los artículos "Formas de Dirichlet y procesos de Markov" y "Ecuaciones diferenciales estocásticas en análisis no estándar" publicados en el boletín de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia.

Julio César Nieto Sánchez

Magíster en Ciencias Financieras y de Sistemas de la Universidad Central, con estudios de Especialización en Estadística y matemático de la Universidad Nacional de Colombia(Bogotá). Docente de matemáticas en la Universidad Central y la Universidad Santo Tomás.

Prefacio

En la actualidad existen libros y páginas virtuales que contienen temas de lógica matemática, pero no cubren la totalidad de los objetos de estudio propuestos por el programa que el Departamento de Matemáticas de la Universidad Central ofrece a sus estudiantes. Por esta razón, hemos elaborado este libro con el objetivo de proporcionar al estudiante material de estudio y problemas prácticos para ser resueltos de manera individual o colaborativa.

El contenido de este material está dividido en nueve capítulos.

En el primer capítulo se ofrece una introducción a los conjuntos con sus formas de expresión; se hace la caracterización de las diversas clases de conjuntos; sus relaciones de pertenencia, contenencia e igualdad; y se abordan las operaciones entre conjuntos, sus propiedades, el conjunto partes, el cardinal de un conjunto, familias de subconjuntos y solución de problemas de encuestas.

En el segundo capítulo se estudia la lógica y el razonamiento; se presentan algunos tipos de razonamiento, las falacias, las proposiciones, los conectivos lógicos y la simbolización de proposiciones.

En el tercer capítulo se estudia la sintaxis de fórmulas bien formadas con los diferentes algoritmos que permiten determinar la decisión de estas fórmulas, y detectar el conectivo principal de una fórmula bien formada; se explica la construcción de árboles de fórmulas bien formadas y se determinan las notaciones infija, prefija y postfija de una fórmula bien formada.

En el cuarto capítulo se estudia la semántica de las proposiciones, las tablas de verdad, la proposición condicional y sus variantes, las tautologías, las contradicciones, las contingencias, las equivalencias lógicas y las leyes del álgebra de proposiciones.

En el quinto capítulo se realiza un estudio de la inferencia lógica que hace parte de la lógica formal, con la cual se determina la validez e invalidez de argumentos con ayuda de las reglas de inferencia y con los conceptos de consistencia e inconsistencia.

En el sexto capítulo se estudia la lógica de primer orden para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden con las funciones proposicionales, los cuantificadores, la sintaxis y la semántica de esta lógica, así como las reglas de inferencia adicionales que permiten determinar la validez de argumentos que contienen proposiciones categóricas.

En el séptimo capítulo se estudian los silogismos categóricos, el modo y la forma de un silogismo, las proposiciones categóricas y los métodos que permiten determninar la validez de un silogismo, entre ellos los diagramas de Venn.

En el octavo capítulo se estudian los métodos de demostración en matemáticas: directo, contraposición, por contradicción e inducción matemática.

En el noveno capítulo se estudian las álgebras de Boole con las propiedades que las caracterizan; se construyen funciones booelanas que son representadas con circuitos lógicos, y estos a su vez son simplificados con los mapas de Karnaugh.

Introducción a la lógica

La lógica clásica o tradicional, se caracteriza por la formulación de un conjunto de leyes para un correcto razonamiento mediante silogismos. Esta lógica fue desarrollada por Aristóteles, por lo cual es considerado el padre de la lógica. Un silogismo bien formulado consta de dos premisas y una conclusión, y cada premisa debe tener un término en común con la conclusión y un segundo término en común con la otra premisa.

La lógica clásica formula reglas con las cuales todos los silogismos bien construidos se pueden identificar como formas válidas o no válidas de argumentación.

A mediados del siglo XIX, los matemáticos británicos G. Boole y A. de Morgan, hicieron nuevos aportes en el campo de la lógica que dieron origen a la lógica simbólica o lógica moderna. Posteriormente, esta fue desarrollada por el matemático alemán G. Frege, y de un modo más riguroso y formal por los matemáticos británicos Russell y Whitehead en su obra *Principia mathematica*.

El sistema lógico construido por Russell y Whitehead cubre un espectro de posibles argumentaciones mayor que el que se puede encontrar en la lógica aristotélica. Más aun, da las bases para los fundamentos lógicos de la matemática y, a su vez, una formulación axiomática y formal de la lógica, esto es, los elementos fundacionales de la lógica matemática.

Tanto la lógica clásica como la lógica moderna bivalente, en sus formas más corrientes, establecen que cualquier proposición que esté bien elaborada puede tomar uno y solo uno de los valores de verdad: o bien es verdadera o bien es falsa. Además, tanto en la rama clásica como la moderna se introducen métodos de lógica deductiva.

También se han desarrollado métodos relativamente modernos de lógica inductiva. En estos se sostiene que cada premisa conlleva una evidencia para la conclusión, pero la verdad de la conclusión se deduce de la verdad de la evidencia solo con un margen relativo de probabilidad.

El estudio de la lógica inductiva ha sido una contribución importante a la ciencia empírica y durante el siglo XX permitió el desarrollo de la filosofía de las ciencias, la lógica combinatoria, la lógica modal, la lógica deóntica, las lógicas polivalentes, las lógicas difusas y las lógicas paraconsistentes.

El pasaje del álgebra de la lógica a la lógica matemática se produjo cuando la lógica se formalizó y se axiomatizó . La formalización fue emprendida por G. Peano (1858-1932). En su obra fundamental *Formulaire de mathématiques*, aparecida en cinco ediciones (1894-1908), cada teorema matemático y algunas de sus demostraciones son analizadas lógicamente y se expresan mediante símbolos. La axiomática aparecía ya en la geometría griega, y hay interesantes referencias a este método en los *Segundos analíticos* de Aristóteles. Sin embargo, la axiomática fue desarrollada y perfeccionada por la lógica matemática.

Históricamente, el pasaje a la lógica matemática concuerda con el instante en que se advirtió que la lógica de enunciados era la teoría fudamental de la lógica. Alrededor de 1880, Peirce manifiesta este punto de vista.

En respuesta a la necesidad de construir argumentos para defender o refutar pensamientos de los demás, Aristóteles creó métodos sistemáticos para analizar y evaluar dichos argumentos, para lo cual desarrolló la lógica proposicional estableciendo procedimientos para determinar la verdad o falsedad de proposiciones compuestas.

En 1646, el matemático Gottfried Leibniz fue el primero en intentar reformar la lógica clásica, al plantear que la dependencia lógica entre proposiciones se puede demostrar reduciendo argumentos complejos a simples. Para ello, propuso representar el conocimiento en una forma que pudiera ser usada por un razonamiento mecánico, con lo cual creó el esquema de la lógica simbólica, que definió como una característica universal.

En 1910-1913 apareció *Principia mathematica*, la obra clasica de la lógica matemática. Sus autores, Bertrand Russell(1872-1970) y Alfred. Whitehead (1861-1947), filósofos con un sólido conocimiento de la matemática, presentaron una magistral codificación de las investigaciones de Frege y de Peano. En *Principia mathematica* se encuentra un sistema axiomático formalizado de lógica bivalente, según la cual los enunciados estudiados solo admiten dos valores, la verdad o la falsedad.

Se adoptó, entonces, el nombre de *lógica matemática* para señalar la influencia de los matemáticos que hicieron posible convertir la lógica polivalente (la que admite para los enunciados estudiados valores diferentes a la verdad y la falsedad) en una ciencia exacta.

El matemático del siglo XIX George Boole fue una de las personas que se preocupó por formalizar y mecanizar el proceso del pensamiento lógico. En 1854, Boole escribió un libro llamado *Las leyes del pensamiento*, con el cual contribuyó al desarrollo de una teoría de la lógica, utilizando símbolos en vez de palabras.

El problema central de la lógica es establecer bajo qué condiciones un enunciado puede ser considerado como conclusión derivada de otros enunciados llamados premisas. La lógica formal tiene por objeto las maneras de argumentar que dependen de la forma de los enunciados, y la lógica material, las maneras de argumentar que dependen de una materia particular sobre la que se aplican los medios de argumentación. Por ejemplo, se argumenta cuando se pasa de la afirmación "Si madrugo, entonces llego a tiempo" a la afirmación "llego a tiempo" cuando la afirmación "madrugo" es verdadera.

La lógica, aun cuando no se tenga plena conciencia de ello, está presente en los diversos procesos de pensamiento que las personas llevan a cabo continuamente en las actividades de la vida cotidiana.

Mediante las operaciones que hacemos con el pensamiento, los seres humanos resolvemos los interrogantes que nos surgen sobre las cosas y construimos conocimiento acerca de ellas. Con este fin, procuramos garantizar la correspondencia entre lo pensado y la realidad representada por el pensamiento. De esta manera, asumimos como "lógicos" aquellos resultados de nuestros procesos de pensamiento que están en concordancia con las cosas de la realidad.

Esto significa, entonces, que aprendemos la lógica, al igual que la gramática, con los hechos de la vida, a través de las experiencias y las reflexiones que realizamos sobre ellas. Y así como es posible hablar y expresar correctamente nuestras ideas sin conocer explícitamente las reglas gramaticales que empleamos para ello, también podemos proceder y razonar lógicamente sin el conocimiento de las reglas o principios lógicos usados, valiéndonos solamente del uso de la razón. Sin embargo, este uso intuitivo tiene sus límites, y es claro que ambos ejercicios se realizan de mejor manera con el conocimiento y uso consciente de las operaciones lógicas y de los principios a los que obedece la razón.

De esta manera, podemos entender la **lógica** como el estudio formal de las operaciones realizadas por el pensamiento, de la forma en que realizamos razonamientos, mediante el cual es posible determinar su validez. Así, la lógica es pensar y hacer explícitos los principios a los que obedece nuestro pensamiento y las operaciones que realiza.

El propósito fundamental de la lógica es estudiar aquellos métodos y principios que permiten distinguir un razonamiento válido de uno que no lo es, mientras que el de la lógica matemática es evaluar con el mayor rigor los conceptos y las reglas de deducción utilizados en matemáticas. Esto hace de la lógica matemática una especie de metamatemática (disciplina que pretende establecer la consistencia de la matemática clásica) que proporciona una técnica matemática rigurosa para la investigación de problemas fundacionales referidos a la matemática y la lógica.

Esto se logra con la construcción de sistemas formales que permiten eliminar la arbitrariedad en la elección de los axiomas y definir explícita y exhaustivamente las reglas de la deducción matemática.

Capítulo 1

Teoría básica de conjuntos

1.1. Conjuntos

La teoría de conjuntos es un sistema matemático y un lenguaje específico para el manejo de ciertos problemas. Al igual que otros sistemas matemáticos, como el álgebra y la geometría, consiste en una serie de conceptos básicos, definiciones, operaciones, propiedades y teoremas.

La teoría de conjuntos es un instrumento adecuado para la sistematización de nuestra manera de pensar y para el desarrollo de la capacidad de análisis. Permite enfocar un problema en su totalidad diferenciando en él lo que carece de importancia de lo que es fundamental. Facilita la visualización de las interrelaciones que pueden existir entre todas las partes componentes de un problema, así como las de cada parte con el todo.

En el análisis de problemas concretos se debe identificar una variedad de cursos posibles de acción y evaluarlos de acuerdo con criterios específicos, a fin de elegir la opción óptima.

Mediante las operaciones entre conjuntos se pueden combinar los elementos de una situación dada, con el fin de identificar alternativas de solución, evaluar la información disponible y separar lo fundamental de lo irrelevante, lo que favorece una mayor eficiencia en la toma de decisiones.

Por esa razón, la metodología propia de los conjuntos y su razonamiento deductivo, no solo fijan un marco de referencia para el análisis lógico de situaciones complejas, sino que además ayudan a sistematizar nuestra capacidad analítica en el manejo de información concreta.

Finalmente, conviene destacar que el aprendizaje de estas nociones básicas facilita notablemente la comprensión de temas matemáticos más avanzados, tales como funciones, probabilidad, muestreo, optimización y otros.

La teoría de conjuntos fue propuesta originalmente por George Cantor a fines del siglo XIX. Al ser axiomatizada por Bertrand Russell a principios del siglo XX, resultó ser una teoría matemática inconsistente. Esto significa que de ella se puede derivar tanto una aserción como su negación, lo cual genera una contradicción que, a su vez, conduce a una paradoja. En su momento se hicieron diversas propuestas de solución. Una de ellas la plantea el mismo Russell en su teoría de tipos; otra más es la teoría Zermelo-Fraenkel, que es la más usada hoy en día y que constituye la teoría de conjuntos moderna. Las diversas propuestas de solución apuntan a impedir la generación del conjunto universal (el conjunto de todos los conjuntos), cuya permisión es precisamente lo que lleva a la conocida paradoja de Russell.

> Un conjunto es una clase de objetos bien definidos que pueden ser números, personas, letras, países, ..., etc. Estos objetos se llaman “elementos” o miembros del conjunto.

Ejemplos

(1) Los números 5, 8, 9 y 10.

(2) Las vocales del alfabeto: a, e, i, o , u

(3) Los números $1, 3, 5, 7, \cdots$

(4) Las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

(5) Los países suramericanos.

Obsérvese que en los conjuntos (1), (2) y (3) se listan sus elementos, mientras que en los conjuntos (4) y (5) se da una característica particular de sus elementos.

Los conjuntos generalmente se denotan con letras mayúsculas:

$$A, B, C, \cdots$$

Por su parte, los elementos de un conjunto se denotan con letras minúsculas:

$$a, b, c, \cdots$$

Al definir un conjunto por la efectiva enumeración de sus elementos, como el conjunto A que consiste de los números 5, 8, 9 y 10, se escribe

$$A = \{5, 8, 9, 10\},$$

separando los elementos por comas y encerrándolos entre llaves $\{\}$. Esta es la llamada “forma tabular” de un conjunto. Pero si se define un conjunto enunciando propiedades que deben tener sus elementos, como el conjunto B que consiste de todos los números impares, entonces se emplea una letra, por lo general x, para representar un elemento cualquiera, y se escribe

$$B = \{x/x \text{ es impar}\},$$

el cual se lee “B es el conjunto de los números x tales que x es impar”.

1.2. Expresión de conjuntos

Los conjuntos se pueden expresar de dos maneras diferentes: por extensión y por comprensión.
• **Por extensión:** cuando el conjunto se expresa listando sus elementos.

$$A = \{a, e, i, o, u\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$$
$$C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\} \qquad D = \{1, -1, 1, -1, \cdots\}$$

• **Por comprensión:** cuando el conjunto se expresa dando una característica en común acerca de sus elementos.

$$A = \{x/x \text{ es una vocal}\} \qquad B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es un número par}\}$$
$$C = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} \qquad D = \{(-1)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$$

1.3. Conjuntos finitos e infinitos

- Un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos, es decir, si, al contar los elementos del conjunto, el proceso de conteo puede terminar.
- Un conjunto es infinito si el número de sus elementos no se puede determinar.

Ejemplos

(1) Son conjuntos finitos:

$$\begin{aligned} A &= \{2, a, b, 5, w\} \\ B &= \{x/x \text{ es un continente}\} \\ &= \{\text{América, África, Asia, Oceanía, Europa}\} \end{aligned}$$

(2) Son conjuntos infinitos:

$$\begin{aligned} C &= \{2, 4, 6, 8, \cdots\} \\ D &= \{x/x \text{ es un número primo}\} \end{aligned}$$

1.4. Conjuntos enumerables y no-enumerables

- Un conjunto es enumerable si sus elementos se pueden enumerar, es decir, si sus elementos se pueden poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales.
- Un conjunto A es no-enumerable si no puede ser enumerado, es decir, un conjunto tal que no existe una función
$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$$
que sea sobreyectiva.

Ejemplos

(1) El conjunto

$$A = \{3, 5, 7, 8 \cdots\}$$

es enumerable, ya que el primer elemento de A es el 3, el segundo elemento de A es el 5, el tercer elemento de A es el 7 y así sucesivamente. Obsérvese que el conjunto es infinito.

(2) El conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

es enumerable.

(3) Son conjuntos no-enumerables:

$$A = \{x/x \text{ es una estrella del sistema solar}\}$$
$$B = \{x/x \text{ es un conjunto}\}$$

1.5. Pertenencia y contenencia

Para indicar que un elemento x pertenece a un conjunto A, se escribe

$$x \in A.$$

Al símbolo "$\in$" se le llama "pertenencia", y para indicar que un elemento x no pertenece a un conjunto A, se escribe

$$x \notin A.$$

Ejemplos

(1) $A = \{a, b, c\}$ es el conjunto formado por los elementos a, b y c, y la expresión $b \in A$ se lee "b pertenece a A", es decir, b es un elemento de A; mientras que 3 no es un elemento de A, es decir que $3 \notin A$".

(2) Para el conjunto $B = \{x/ \text{ es impar}\}$, $3 \in B$, $2 \notin B$, $17 \in B$, $20 \notin B$.

Se dice que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B si todo elemento de A es un elemento de B. Se escribe

$$A \subseteq B \quad \text{o también}$$
$$A \subset B \quad (\text{si } A \text{ no es igual a } B)$$

que se lee con la expresión "A está contenido en B" o "B contiene a A".

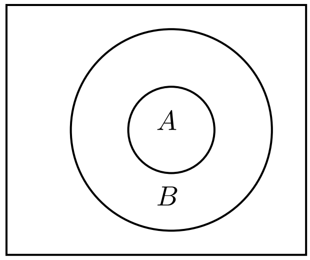

Figura 1.1 A contenido en B
$A \subset B$

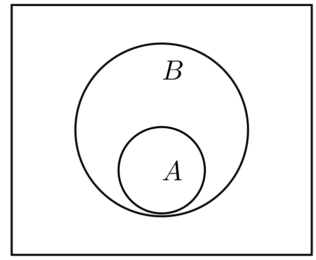

Figura 1.2 B contiene a A
$B \supset A$

Esto significa que

$$\text{Si } x \in A, \text{ entonces } x \in B.$$

Si A no es un subconjunto de B, se escribe

$$A \not\subseteq B$$

La expresión $B \supset A$ significa $A \subset B$.

Ejemplos

(1) Sean $A = \{4, 6\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Entonces $A \subset B$, es decir "A está contenido en B", ya que los elementos de A, que son 4 y 6, son elementos de B.

(2) Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es primo menor o igual a } 8\} \qquad \text{y} \qquad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Entonces $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $A \subset B$ ya que los elementos de A son elementos de B.

(3) Sean $A = \{a, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ y $B = \{b, c, \{a\}, \{b, c\}\}$. Obsérvese que $a \notin B$, $\{a\} \subseteq A$, $A \supseteq \{a\}$ y $\{b\} \notin B$.

(4) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 7\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x + 24 = 0\}$ subconjuntos del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Obsérvese que $B \subset A$, ya que las soluciones $x = 4$ y $x = 6$ de la ecuación dada en B son elementos del intervalo $A = [3, 7]$.

1.6. Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento de A pertenece a B y cada elemento de B pertenece a A. La igualdad de los conjuntos A y B se denota por

$$A = B.$$