

TELECOMUNICACIONES
DIGITALES

TELECOMUNICACIONES DIGITALES

Jesús Mauricio Ramírez Viáfara

Harold Armando Romo Romero

María Manuela Silva Zambrano

Convocatoria

 **2018**
Investigación

editorial
UC

Universidad del Cauca
2020

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

Ramírez Viáfara, Jesús Mauricio

Telecomunicaciones digitales / Jesús Mauricio Ramírez Viáfara, Harold Armando Romo Romero, María Manuela Silva Zambrano. -- 1a. ed. -- Popayán : Universidad del Cauca, 2020.

p.260

Incluye datos de los autores. -- Contiene referencias bibliográficas.

ISBN 978-958-732-442-6 -- 978-958-732-443-3 (digital)

I. Comunicaciones digitales 2. Telecomunicaciones I. Romo Romero, Harold Armando II. Silva Zambrano, María Manuela
III. Título

CDD: 621.382 ed. 23

CO-BoBN- a1057508

Telecomunicaciones digitales

© Universidad del Cauca, 2020

© Jesús Mauricio Ramírez Viáfara, Harold Armando Romo Romero y María Manuela Silva Zambrano

Primera edición en Castellano

Editorial Universidad del Cauca, noviembre de 2020

ISBN impreso: 978-958-732-442-6

ISBN digital: 978-958-732-443-3

Diseño Editorial: Área de Desarrollo Editorial Universidad del Cauca

Corrección de estilo: Laura Mercedes Carvajal Guaca

Diagramación: Cristian David Ordoñez Ordoñez

Diseño de carátula: Cristian David Ordoñez Ordoñez

Imagen de carátula: <https://www.benigo.com/5-tips-for-getting-started-with-digital-signal-processing-dsp-on-arm-cortex-m-cpus/dsp-banner/>

Editor General de Publicaciones: Mario Delgado-Noguera

Editorial Universidad del Cauca

Editorial Universidad del Cauca

Casa Mosquera Calle 3 No. 5-14

Popayán, Colombia

Código Postal 190003

Teléfonos: (2) 8209800 Ext 1134

<http://www.unicauca.edu.co/editorial/>



Licencia Creative Commons Atribución – No comercial – Sin
Derivar 4.0 Colombia
(CC BY-NC-ND 4.0 CO)

Contenido

Prólogo.....	15
Introducción.....	17
Breve historia de las telecomunicaciones digitales.....	17
Limitaciones en las telecomunicaciones.....	18
Definiciones básicas.....	19
Transformada de Fourier.....	19
Algunas formas de onda especiales.....	22
Algunas nociones de procesos estocásticos.....	28
El sistema de comunicación digital.....	31
El ruido blanco aditivo gaussiano.....	33
Resumen.....	36
Ejemplo de aplicación.....	36
Ejercicios propuestos.....	42
Muestreo y conversión analógica-digital.....	49
Introducción.....	49
Teorema de muestreo.....	50
Cuantificación.....	57
Codificación de fuente.....	68
Modulación por codificación de pulsos (PCM).....	69
Modulación delta lineal –LDM–.....	70
Multiplexación por división de tiempo –TDM–.....	72
Codificación de Línea.....	74
Resumen.....	79
Ejemplo de aplicación.....	79
Ejercicios propuestos.....	87
Modulación digital.....	93
Introducción.....	93
Parámetros de desempeño.....	99
Modulación por Amplitud de pulsos de M Estados –M-PAM–.....	101
Modulación digital en dos dimensiones.....	113
Modulación digital binaria pasa-banda.....	124
Criterios de decisión.....	127

Cálculo de la probabilidad de error en esquemas de modulación digital	130
Resumen.....	139
Ejemplo de aplicación.....	140
Ejercicios propuestos.....	148
Codificación de control de errores.....	153
Introducción a la codificación de canal	153
Códigos bloque lineales.....	154
Códigos cíclicos	162
Desempeño frente al ruido de los códigos bloque lineales	166
Códigos convolucionales	171
Resumen	176
Ejemplo de aplicación	176
Ejercicios propuestos.....	186
Introducción a la teoría de la información	191
Introducción.....	191
Información de un evento	191
Entropía de fuentes discretas.....	193
Codificación de fuentes discretas sin memoria.....	197
Canales discretos sin memoria.....	201
Entropía diferencial	208
Canales continuos.....	211
Capacidad del canal AWGN	216
Resumen.....	222
Ejemplo de aplicación.....	223
Ejercicios propuestos.....	232
Apéndice	
Demostración de propiedades	239
Propiedad del MSE en cuantificación óptima: caso 1	239
Densidad espectral de potencia de un código de línea.....	241
Densidad espectral de potencia de una señal Modulada en M-PAM	246
Densidad espectral de potencia de una señal Modulada en M-QAM (M-PSK)	247
Maximización de la entropía de una variable aleatoria discreta.....	248
Maximización de la entropía diferencial de una variable aleatoria continua.....	250
Referencias citadas.....	253
Sobre los autores	259

Lista de gráficos

Gráfico 1. Función pulso rectangular	23
Gráfico 2. Función seno cardinal.....	23
Gráfico 3. Función escalón (izquierda) y función signo (derecha)	26
Gráfico 4. Función pulso triangular.....	27
Gráfico 5. Realizaciones del proceso estocástico.....	37
Gráfico 6. Función de media	38
Gráfico 7. Dominio de la función de autocorrelación.....	39
Gráfico 8. Dominio de la función de autocorrelación en términos de τ	40
Gráfico 9. Función de autocorrelación promedio	41
Gráfico 10. Densidad espectral de energía del proceso estocástico	42
Gráfico 11. Proceso de muestreo impulsivo	51
Gráfico 12. Espectro de la señal muestreada.....	53
Gráfico 13. Reconstrucción de $u(t)$ a partir de sus muestras.....	55
Gráfico 14. Proceso de muestreo con pulsos rectangulares	56
Gráfico 15. Espectro de la señal muestreada con pulsos rectangulares.....	56
Gráfico 16. Ejemplo de un cuantificador	58
Gráfico 17. Ilustración de la cuantificación uniforme sobre la recta numérica	60
Gráfico 18. Característica de transferencia de un cuantificador uniforme	60
Gráfico 19. Cuantificación uniforme para el caso 1	62
Gráfico 20. Cuantificación uniforme para el caso 2	63
Gráfico 21. Cuantificación uniforme para el caso 3	64
Gráfico 22. Proceso LDM	71
Gráfico 23. Funcionamiento TDM	73
Gráfico 24. Códigos de línea con pulsos rectangulares	77
Gráfico 25. Densidades espectrales de potencia de los diferentes códigos de línea	78
Gráfico 26. Característica de transferencia del cuantificador uniforme	82
Gráfico 27. Característica de transferencia del cuantificador óptimo	83
Gráfico 28. Aspecto general de las densidades de probabilidad condicionales de la observación Y_k para una constelación real.	99
Gráfico 29. Constelación 2-PAM.	101
Gráfico 30. Constelación 4-PAM	102
Gráfico 31. Constelación 8-PAM	102
Gráfico 32. Ilustración del criterio de Nyquist en el dominio del tiempo	106
Gráfico 33. Transmisión 2-PAM libre de ISI	106
Gráfico 34. Pulso de coseno alzado con $\alpha=0.5$	108
Gráfico 35. Funciones RC y pulsos SRRC en el dominio del tiempo	109
Gráfico 36. Espectro de coseno alzado.	110
Gráfico 37. Espectro de raíz cuadrada de coseno alzado	111
Gráfico 38. Señal 2-PAM, sin ISI, a la salida del filtro receptor.....	111
Gráfico 39. Diagrama de ojo para una modulación 2-PAM sin ISI.....	112
Gráfico 40. Diagramas de constelación de un esquema 2-PAM (sin ruido).....	112

Gráfico 41. Constelación 4-QAM	114
Gráfico 42. Constelación 16-QAM	114
Gráfico 43. Constelación 64-QAM	115
Gráfico 44. Constelación 4-PSK	116
Gráfico 45. Constelación 8-PSK	116
Gráfico 46. Algunas constelaciones 8-QAM híbridas.....	117
Gráfico 47. Espectro de una señal modulada M-QAM / M-PSK	120
Gráfico 48. Densidad de probabilidad del ruido complejo observado en el receptor	121
Gráfico 49. Diagrama de ojo para un esquema 4-QAM sin ruido ni ISI.....	123
Gráfico 50. Densidad de probabilidad de la observación para la modulación 4-QAM	123
Gráfico 51. Diagrama de constelación para la modulación 4-QAM	124
Gráfico 52. Constelación ASK	125
Gráfico 53. Constelación FSK	126
Gráfico 54. Espectro FSK	126
Gráfico 55. Ilustración del criterio ML.....	128
Gráfico 56. Densidades de probabilidad condicionales para un esquema de modulación binario	132
Gráfico 57. Curva de desempeño de la modulación 2-PAM.....	134
Gráfico 58. Funciones de densidad condicionales y regiones de decisión de una constelación de 4 símbolos.....	136
Gráfico 59. Diagrama de constelación recibido y distancia mínima en 16-QAM	137
Gráfico 60. Ilustración generalizada del evento "error"	137
Gráfico 61. Densidad espectral de potencia.....	142
Gráfico 62. (a) Diagrama de estados, (b) Diagrama de Trellis	174
Gráfico 63. Resultados de BER vs EbNo	180
Gráfico 64. Información de un evento.....	192
Gráfico 65. Entropía de una fuente binaria sin memoria.....	195
Gráfico 66. Información mutua del BSC en función de la probabilidad a priori del "0"	207
Gráfico 67. Información mutua del BSC en función de la probabilidad de error del canal....	207
Gráfico 68. Densidad de probabilidad de la salida de un canal con ruido aditivo con entrada binaria y dos tipos de ruido: uniforme (arriba) y gaussiano (abajo)	214
Gráfico 69. a) C vs P (B y No constantes). b) C vs B (P y No constantes). c) C vs . No (B y P constantes).....	219
Gráfico 70. Brecha a la capacidad de la modulación 2-PAM.....	222
Gráfico 71. Probabilidad de error versus lambda.....	225
Gráfico 72. Función de densidad de probabilidad de Y.....	227
Gráfico 73. Información mutua entre X y Y	228
Gráfico 74. Información mutua entre la entrada y la salida del decisor.....	229
Gráfico 75. Probabilidad de error versus energía de bit	230

Lista de esquemas

Esquema 1. Sistema de comunicación digital	23
Esquema 2. Modelo de canal lineal con ruido aditivo	25
Esquema 3. Proceso de conversión analógica digital	42
Esquema 4. Estructura de un PCM encoder	62
Esquema 5. Estructura de un PCM decoder	62
Esquema 6. LDM encoder	64
Esquema 7. LDM decoder	64
Esquema 8. Multiplexación por División de Frecuencia	65
Esquema 9. Sistema TDM	66
Esquema 10. Proceso de modulación y demodulación digital	86
Esquema 11. Etapas de la modulación / demodulación digital	86
Esquema 12. Transformación de bits a símbolos	87
Esquema 13. Proceso de decisión	90
Esquema 14. Modulador M-PAM	95
Esquema 15. Demodulador M-PAM	96
Esquema 16. Puntos del receptor donde se evalúan los diagramas de ojo y constelación	105
Esquema 17. Modulador M-QAM / M-PSK	110
Esquema 18. Implementación equivalente del modulador M-QAM / M-PSK	112
Esquema 19. Demodulador M-QAM / M-PSK	114
Esquema 20. Proceso de codificación bloque lineal	151
Esquema 21. Proceso de decodificación bloque lineal	151
Esquema 22. Codificador convolucional de una entrada	163
Esquema 23. Codificador convolucional de dos entradas	164
Esquema 24. Ilustración del algoritmo de Huffman	191
Esquema 25. Árbol de decodificación del código prefijo del ejemplo	191
Esquema 26. Ilustración de un canal discreto sin memoria	193
Esquema 27. Ilustración de un canal simétrico binario	197
Esquema 28. Diagrama del sistema	215

Lista de tablas

Tabla 1. Propiedades de la transformada de Fourier	21
Tabla 2. Propiedades de la función impulso	24
Tabla 3. Transformadas de Fourier de algunas formas de onda especiales	27
Tabla 4. Probabilidad y valor esperado de los intervalos de cuantificación	82
Tabla 5. Síndromes del código Hamming (7,4)	161
Tabla 6. Ganancias de codificación asintóticas de algunos códigos bloque	170
Tabla 7. Probabilidad de error para los diferentes sistemas	179
Tabla 8. Palabras codificadas	181
Tabla 9. Entropías diferenciales de algunas distribuciones conocidas	209

Lista de acrónimos

AM	Amplitude Modulation, Modulación de Amplitud.
AMI	Alternate Mark Inversion, Inversión Alternada de Marca.
ARQ	Automatic Repeat Request, Solicitud de Repetición Automática.
ASK	Amplitude Shift Keying, Modulación por Desplazamiento de Amplitud.
AWGN	Additive White Gaussian Noise, Ruido Blanco Aditivo Gaussiano.
BER	Bit Error Rate, Tasa de Error de Bit.
BPSK	Binary Phase Shift Keying, Modulación de Desplazamiento de Fase Binaria.
BSC	Binary Symmetric Channel, Canal Simétrico Binario.
DC	Direct Current, Corriente Directa.
DMC	Discrete Memoryless Channel, Canal Discreto Sin Memoria.
DMS	Discrete Memoryless Source, Fuente Discreta Sin Memoria.
FDM	Frequency Division Multiplexing, Multiplexación por División de Frecuencia.
FEC	Forward Error Correction, Corrección de Errores Hacia Adelante.
FM	Frequency Modulation, Modulación de Frecuencia.
FSK	Frequency Shift Keying, Modulación por Desplazamiento de Frecuencia.
i.i.d.	Independientes e idénticamente distribuidas.
ISI	Inter Symbol Interference, Interferencia Inter Simbólica.
LDM	Linear Delta Modulation, Modulación Delta Lineal.
LTI	Linear Time-Invariant, Lineal e Invariante en el Tiempo.
MAP	Maximum A Posteriori Probability, Probabilidad A Posteriori Máxima.
MD	Minimum Distance, Distancia Mínima.
ML	Maximum Likelihood, Verosimilitud Máxima.
M-PAM	M-ary Pulse Amplitude Modulation, Modulación por Amplitud de Pulsos de M-estados.
M-PSK	M-ary Phase Shift Keying, Modulación por Desplazamiento de Fase de M-estados.
M-QAM	M-ary Quadrature Amplitude Modulation, Modulación de Amplitud en Cuadratura de M-estados.
MSE	Mean Square Error, Error Cuadrático Medio.
NRZ	Non Return to Zero, No Retorno a Cero.
PCM	Pulse Code Modulation, Modulación por Codificación de Pulsos.
pdf	Probability density function, Función de densidad de probabilidad.
pmf	Probability mass function, Función de masa de probabilidad.
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying, Modulación por Desplazamiento de Cuatro Fases.
RC	Raised Cosine, Coseno Alzado.
RZ	Return to Zero, Retorno a Cero.
SER	Symbol Error Rate, Tasa de Error de Símbolo.
SSB	Single Side Band, Banda Lateral Única.
SRRC	Square Root Raised Cosine, Raíz Cuadrada de Coseno Alzado.
v.a.	variable aleatoria.
TDM	Time Division Multiplexing, Multiplexación por División de Tiempo.
WSS	Wide Sense Stationary, Estacionario en Sentido Amplio.

Lista de símbolos

- $x(t)$: Señal determinista.
- $X(t)$: Proceso estocástico.
- $\delta(t)$: Función delta de Dirac.
- $\delta[n]$: Función delta de Kronecker.
- X : Variable aleatoria.
- \mathbf{X} : Vector aleatorio.
- $\tilde{x}(f)$: Transformada de Fourier de una señal determinista $x(t)$.
- $\Phi_X(f)$: Densidad espectral de potencia de un proceso estocástico $X(t)$.
- $\Pr\{A\}$: Probabilidad de un evento A .
- $E[X]$: Valor esperado de una variable aleatoria X .
- $V[X]$: Varianza de una variable aleatoria X .
- $f_X(x)$: Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X .
- $\operatorname{argmin}\{x\}$: Función argumento mínimo.
- $\mathcal{F}\{x(t)\}$: Operador de la transformada de Fourier sobre una señal $x(t)$.
- $\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{x}(f)\}$: Operador de la transformada inversa de Fourier sobre una señal $\tilde{x}(f)$.
- $\lceil x \rceil$: Función parte entera superior.
- $\lfloor x \rfloor$: Función parte entera inferior.

Prólogo

El mundo globalizado en el que vivimos hoy en día es, en gran medida, una consecuencia del avance vertiginoso de los sistemas de telecomunicaciones digitales. La revolución de las comunicaciones digitales comenzó a mediados del siglo XX con los postulados de Shannon, los cuales dieron forma a lo que hoy en día conocemos como “teoría de la información”. La teoría de la información no solo fue el inicio de una serie de desarrollos fascinantes, sino que cambió definitivamente la percepción del concepto de información. La teoría moderna de las telecomunicaciones digitales surgió entonces como un intento por alcanzar los límites fundamentales descubiertos por Shannon.

La teoría de las telecomunicaciones digitales proporciona los elementos analíticos necesarios para entender el funcionamiento de los sistemas de comunicación digitales, y además establece las normas y los criterios básicos de diseño de cada uno de los componentes que constituyen dichos sistemas, desde la forma como la fuente debe representar los mensajes a transmitir, hasta la manera como debe operar el receptor para recuperar la información con el mayor grado de exactitud. Así, el objetivo global de un sistema de comunicación digital es bastante claro: transmitir información a la mayor velocidad posible, con la máxima precisión posible, y con el menor costo posible. Dentro de este contexto, es necesario aclarar que velocidad es sinónimo de ancho de banda, precisión es sinónimo de baja probabilidad de error y costo es sinónimo de potencia de transmisión.

Este libro está dirigido a estudiantes y docentes, tanto de pregrado como de posgrado, del campo de la Ingeniería Electrónica, especialmente en el área de telecomunicaciones, pero también al público en general. Puede ser usado como texto guía para un curso formal de Teoría de Telecomunicaciones Digitales. Se recomienda que el lector tenga conocimientos básicos en cálculo diferencial e integral, análisis de Fourier y teoría de la probabilidad. El estilo del libro consiste en exponer conceptos y definiciones básicas a través de ecuaciones, tratando de guardar un equilibrio entre el rigor matemático que merece cada concepto y la idea intuitiva detrás de cada enunciado, luego se aclaran los conceptos mediante la solución de problemas y la aplicación en el mundo real. Al final de cada capítulo se plantean una serie de ejercicios, incluyendo respuestas y algoritmos de simulación en Matlab con el ánimo afianzar aún más el aprendizaje. Como

Apéndice, se presentan las demostraciones matemáticas de algunas propiedades y teoremas que permitirán alcanzar un conocimiento más profundo.

La estructura del libro es la siguiente: en el capítulo 1 denominado “Introducción”, se hace un compendio de definiciones básicas referentes a la comunicación digital y se realiza un breve resumen de algunas de las herramientas matemáticas que serán usadas en el resto del texto. En el apartado número 2, denominado “Muestreo y conversión analógica digital”, se enuncia y demuestra el teorema de muestreo, el cual constituye la brecha entre los mundos analógico y digital, y se trata el problema de la cuantificación de señales, tanto deterministas como aleatorias. También se hace mención a la codificación de fuente y a la codificación de línea como aspectos complementarios al proceso total de conversión analógica a digital. En el capítulo 3, denominado “Modulación digital”, se explica de manera general el proceso de transmitir información digital a través de un canal ruidoso y se definen los parámetros para medir el desempeño de la transmisión. Luego, se exponen los esquemas de modulación elementales, junto con sus características temporales y espectrales, tomando como referencia la teoría de Nyquist para transmisión de información a través de canales limitados en ancho de banda. Finalmente, se aborda el problema de la detección desde una perspectiva probabilística, mencionando los diferentes criterios de decisión existentes en torno a la minimización de la probabilidad de error en la reconstrucción del mensaje. En el apartado 4 denominado “Codificación de control de errores”, se estudia el proceso de codificación de canal como una extensión natural de la modulación. Aquí se da a conocer la estructura matemática de los códigos bloque lineales y se analizan las diferentes estrategias de detección, junto con su desempeño. Finalmente, en el capítulo 5, denominado “introducción a la teoría de la información”, se definen conceptos relevantes, tales como información, entropía y capacidad, los cuales permiten entender las fronteras fundamentales que enmarcan el funcionamiento de los sistemas de comunicación digital, haciendo un especial énfasis en el más conocido de los aportes de Shannon, a saber, la capacidad de un canal ruidoso.

Introducción

Breve historia de las telecomunicaciones digitales

A continuación se presenta una breve reseña histórica de los descubrimientos más importantes que marcaron el desarrollo de los sistemas de telecomunicación digital:

- En la primera mitad del siglo XIX, se descubrió la relación existente entre los campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo gracias a los trabajos de Faraday, Ampère y Gauss. A partir de estos descubrimientos fue posible la construcción del telégrafo eléctrico, desarrollado por Samuel Morse en 1837, considerado como el primer sistema de telecomunicación digital.
- La formalización matemática de la teoría electromagnética se dio en la segunda mitad del siglo XIX gracias al trabajo de Maxwell, quien recopiló todo el conocimiento referente al electromagnetismo y lo condensó en cuatro ecuaciones generales, conocidas como ecuaciones de Maxwell. Dichas ecuaciones sugerían la existencia de un fenómeno físico, hasta el momento desconocido, denominado onda electromagnética.
- Si bien Maxwell predijo la existencia de las ondas electromagnéticas, su trabajo fue netamente teórico. La comprobación práctica de los postulados de Maxwell solo se logró 20 años después gracias a los experimentos realizados por Hertz, quien encontró la manera de generar y detectar ondas electromagnéticas. No obstante, la primera persona que usó las ondas electromagnéticas para transmitir información fue Marconi en 1899, lo que marcó el inicio de la era de las radiocomunicaciones.
- Al mismo tiempo, Meucci logró transmitir voz humana a través de cables de cobre en 1860. Este descubrimiento dio origen a la era de la telefonía analógica. Pocos años después fue posible la transmisión de voz a través del espacio libre gracias a la invención de la radio AM en 1906 y la radio FM en 1933. Estas innovaciones tecnológicas volcaron el interés científico hacia las comunicaciones analógicas.

- Hasta el momento todos los esfuerzos estaban enfocados hacia la explotación de los medios de transmisión responsables de la propagación a largas distancias. Sin embargo, no existía una teoría formal enfocada al análisis de los sistemas de telecomunicación desde la perspectiva de la información. Este cambio de perspectiva inicia con los postulados de Nyquist, quien con su teorema de muestreo logra crear un puente, hasta el momento inexistente, entre la información analógica y la información digital. Otro gran aporte fue realizado por Wiener al formalizar la teoría de la detección.
- Así como Maxwell sentó las bases matemáticas de las radiocomunicaciones, fue Shannon quien definió lo que hoy en día se conoce como teoría de la información.
- La teoría de la información, junto con la teoría de la detección y el teorema de muestreo dieron origen a la teoría moderna de las telecomunicaciones digitales. Dicha teoría se encarga de estudiar los componentes de un sistema de comunicación digital con el propósito de optimizar su desempeño, independientemente del medio de transmisión utilizado.

Limitaciones en las telecomunicaciones

Un sistema de comunicación digital se enfrenta a varios tipos de limitaciones, entre las cuales se destacan:

- Tecnológicas. La velocidad de procesamiento, transmisión y capacidad de almacenamiento de información están condicionadas por el software y el hardware disponibles.
- Económicas. La velocidad de penetración de la tecnología de punta siempre estará determinada por su precio en el mercado.
- Políticas. Cada país maneja su propio ritmo en cuanto a la creación de políticas de desarrollo y adopción de nueva tecnología.
- Regulación. La consolidación de estándares y normas que regulan la tecnología a nivel nacional o internacional, no siempre va de la mano con la innovación tecnológica. Normalmente es más tardía y en ocasiones nunca llega a darse, pues la tecnología quizá ya haya desaparecido en ese momento.
- Físicas. El ancho de banda y el ruido del canal determinan la máxima velocidad con que se puede transmitir información de manera confiable.

Definiciones básicas

A continuación se dan a conocer algunas definiciones comunes en el contexto de las comunicaciones digitales.

- Mensaje digital. Es una secuencia ordenada de símbolos, donde cada símbolo pertenece a un conjunto finito discreto denominado alfabeto.
- Sistema de comunicación digital. Son todos los mecanismos y procesos que hacen posible intercambiar mensajes digitales entre una fuente y un destino.
- Información. Es el conocimiento adquirido y/o comunicado. La información de un mensaje es cuantificable gracias a la teoría de la información.
- Señal. Es la representación física del mensaje. Por lo general, las señales son funciones del tiempo cuya naturaleza depende del medio de transmisión. Así, por ejemplo, para el espacio libre se utilizan ondas electromagnéticas (campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo), para un cable metálico se utilizan ondas eléctricas (voltajes y corrientes) y para fibra óptica, se utilizan pulsos lumínicos.
- Ancho de banda de un sistema. Es el rango de frecuencias habilitado para el paso de señales a través de él. Lo determina su respuesta en frecuencia.
- Espectro de una señal. Es la representación de la señal en el dominio de la frecuencia. La herramienta matemática más común para obtener el espectro de una señal es la transformada de Fourier. El espectro permite establecer las frecuencias que componen la señal y el aporte energético de cada una de ellas.
- Ancho de banda de una señal. Es el rango de frecuencias donde se encuentra el porcentaje de energía (o de potencia) más significativo de la señal. Por ejemplo, una señal de voz analógica tiene un ancho de banda aproximado de 3300 Hz. Una señal de audio tiene un ancho de banda aproximado de 20 KHz. Una señal de video tiene un ancho de banda aproximado de 4 MHz (en el estándar estadounidense), y de 6 MHz (en el estándar europeo). Finalmente, una señal digital tiene un ancho de banda que depende de la velocidad de transmisión.

Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una señal del tiempo $x(t)$, es una función compleja $\tilde{x}(f)$, de la variable real f , la cual está dada por

$$\tilde{x}(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (1)$$

donde $\mathcal{F}\{\cdot\}$ es el operador de transformada de Fourier. Cabe anotar que si las unidades de t son los segundos (s), las unidades de f son los Hertz (Hz). Así mismo, si las unidades de t son ms, las unidades de f son kHz, etc. Como $\tilde{x}(f)$ es compleja, se la puede expresar como

$$\tilde{x}(f) = |\tilde{x}(f)| e^{j\arg[\tilde{x}(f)]}, \quad (2)$$

donde $|\tilde{x}(f)|$ se conoce como espectro de magnitud y $\arg[\tilde{x}(f)]$ como espectro de fase.

La transformada inversa de Fourier permite obtener $x(t)$ a partir de $\tilde{x}(f)$ y está definida por

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{x}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (3)$$

donde $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ es el operador de transformada inversa de Fourier. A continuación, se presenta la Tabla 1 con las propiedades más importantes de la transformada

de Fourier. En dicha tabla: $\tilde{x}(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ $\tilde{y}(f) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ y a, b, T son constantes reales arbitrarias. En Kreyszig (2010) y Spiegel (1998) se hace un tratamiento completo de las series y transformadas de Fourier. En Carlson y Crilly (2010) se explica de forma muy clara las propiedades de las transformadas de Fourier. En Benvenuto y Cherubini (2007), como en Oppenheim, Willsky y Nawab (1996), se muestran tablas de resumen de las propiedades de las transformadas de Fourier, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto.

Tabla 1. Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad	Tiempo	Frecuencia
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$a\tilde{x}(f) + b\tilde{y}(f)$
Traslación en tiempo	$x(t - a)$	$e^{-j2\pi af}$
Traslación en frecuencia	$e^{j2\pi at}x(t)$	$\tilde{x}(f - a)$
Cambio de escala	$x(at)$	$\frac{1}{ a }\tilde{x}\left(\frac{f}{a}\right)$
Derivación	$\frac{dx}{dt}$	$j2\pi f\tilde{x}(f)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{\tilde{x}(f)}{j2\pi f} + \frac{\tilde{x}(0)}{2}\delta(f)$
Multiplicación por t	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d\tilde{x}}{df}$
Convolución ¹ en tiempo	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$	$\tilde{x}(f)\tilde{y}(f)$

1 La convolución entre dos señales de tiempo continuo, $x(t)$ y $y(t)$, es una operación matemática definida como:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau.$$

Una de las aplicaciones más importantes de la convolución es el filtraje de señales. En general, la señal filtrada corresponde a la convolución entre la señal que se quiere filtrar y la respuesta al impulso del filtro.

Propiedad	Tiempo	Frecuencia
Convolución en frecuencia	$x(t)y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) \tilde{y}(f - \omega) d\omega$
Señal T -periódica	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$
Nivel DC	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$	$\tilde{x}(0)$
Energía	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) ^2 df$
Teorema de Rayleigh	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f)\tilde{y}(-f) df$
Dualidad	$\tilde{x}(t)$	$x(-f)$

Fuente: elaboración propia.

Algunas formas de onda especiales

En comunicaciones digitales es común el uso de formas de onda especiales para representar matemáticamente algunas señales típicas. A continuación, se describen algunas de esas formas de onda. En Carlson y Crilly (2010) se hace un tratamiento más extenso de estas formas de onda especiales. Función pulso rectangular: La función pulso rectangular, de ancho a , de un argumento real t , simbolizada con $\text{rect}(t/a)$, se define como:

$$\text{rect}(t/a) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & |t| > \frac{a}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Entre los usos más importantes de esta función se destacan la representación de pulsos de banda ancha, la representación de espectros de señales limitadas en banda y el acotamiento temporal de señales de duración infinita. En el Gráfico 1 se muestra la función pulso rectangular de ancho uno.

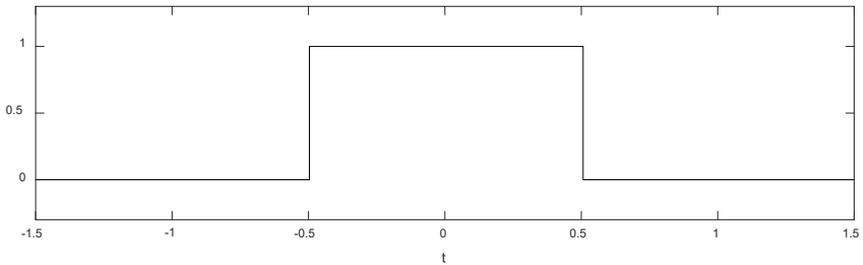


Gráfico 1. Función pulso rectangular.
Fuente: elaboración propia.

Una propiedad notable de la función pulso rectangular es su carácter idempotente, esto es

$$\text{rect}^n(t/a) = \text{rect}(t/a), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (5)$$

Función seno cardinal: La función seno cardinal (o función de muestreo) de un argumento real t , se simboliza con $\text{sinc}(t)$ y se define como

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Entre los usos más destacados de esta función están la representación de pulsos de banda angosta y la reconstrucción de señales analógicas a partir de sus muestras. En el Gráfico 2 se muestra la función seno cardinal de un argumento genérico t .

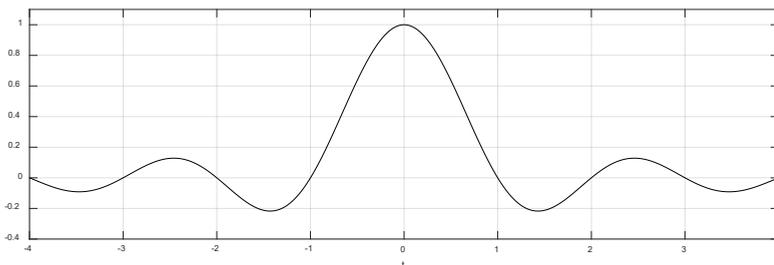


Gráfico 2. Función seno cardinal
Fuente: elaboración propia.

Una propiedad notoria de la función seno cardinal es su invarianza respecto a la convolución, esto es

$$\text{sinc}(t) * \text{sinc}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(z) \text{sinc}(t-z) dz = \text{sinc}(t). \quad (7)$$

Función impulso: La función impulso (o delta de Dirac) es una función infinitamente angosta e infinitamente elevada, definida mediante el siguiente límite

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}. \quad (8)$$

En la Tabla 2 se resumen las propiedades más relevantes de la función impulso.

Tabla 2. Propiedades de la función impulso

Propiedad	Expresión matemática
Escalonado	$\delta(at) = \frac{1}{ a } \delta(t)$
Peso	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
Muestreo	$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta(t-a) dt = \begin{cases} x(a), & \text{si } t_1 < a < t_2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$
Convolución	$x(t) * \delta(t) = x(t)$ $x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$

Fuente: elaboración propia.

Dentro de los usos más comunes de la función impulso en telecomunicaciones están el muestreo de señales de tiempo continuo y la representación espectral de señales periódicas.

- Función escalón: La función escalón (o función paso de Heaviside) de un argumento real t , con notación $\mu(t)$, se define como

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Al igual que el pulso rectangular, la función escalón es idempotente, esto es

$$\mu^n(t) = \mu(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (10)$$

Aplicando la propiedad de muestreo de la función impulso se puede observar que

$$\int_{-\infty}^t \delta(z) dz = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = \mu(t), \quad (11)$$

por tanto

$$\frac{d\mu}{dt} = \delta(t). \quad (12)$$

- Función signo: La función signo de un argumento real t , con notación $\text{sgn}(t)$, se define como

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}. \quad (13)$$

La función escalón se puede representar en términos de la función signo como

$$\mu(t) = \frac{1 + \text{sgn}(t)}{2}. \quad (14)$$

Dentro de los usos comunes de la función signo en telecomunicaciones están la reconstrucción de mensajes binarios afectados por ruido y la modulación de Banda Lateral Única –SSB, *Single Side Band*–. En el Gráfico 3 se muestran las funciones escalón y signo.

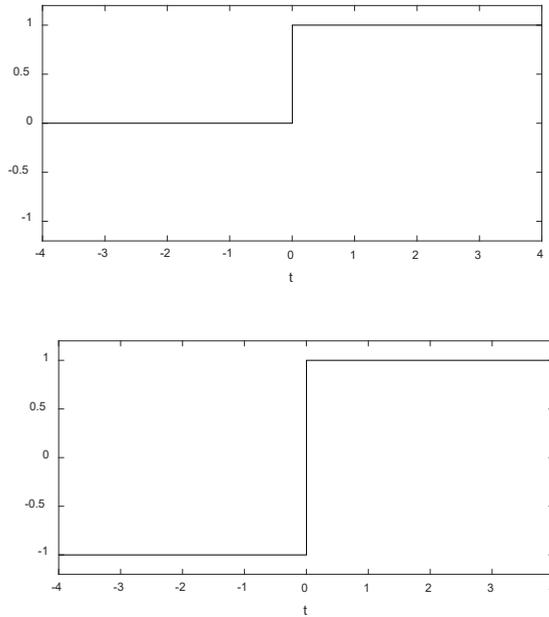


Gráfico 3. Función escalón (izquierda) y función signo (derecha)
Fuente: elaboración propia.

Función pulso triangular: La función pulso triangular, de ancho $2a$, de un argumento real t , con notación $\text{trgl}(t/a)$, se define como

$$\text{trgl}(t/a) = [1 - |t/a|] \text{rect}\left(\frac{t}{2a}\right) = \begin{cases} 1 - |t/a|, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases} \quad (15)$$

La función $\text{trgl}(t/a)$ resulta de la convolución de dos pulsos rectangulares idénticos, esto es

$$\text{trgl}(t/a) = \frac{1}{a} \text{rect}(t/a) * \text{rect}(t/a). \quad (16)$$